

کد کنترل

731

A



صبح پنجشنبه
۱۳۹۸/۳/۲۳

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۸

مجموعه ریاضی - کد (۱۲۰۸)

مدت پاسخ‌گویی: ۲۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۵۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۰	۳۱	۷۰
۳	آنالیز ریاضی	۲۰	۷۱	۹۰
۴	مبانی جبر و مبانی ترکیبیات	۲۰	۹۱	۱۱۰
۵	جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل	۲۰	۱۱۱	۱۳۰
۶	احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی	۲۰	۱۳۱	۱۵۰

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و یا متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۸

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالات و پائین پاسخنامه را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- I would like to compliment Jaden for the course of action he recommended because I think it will ----- our problem once and for all.
1) sequence 2) speculate 3) signify 4) settle
- 2- An ----- is often expressed as a simile, as in "The football game was like a battle between gladiators."
1) endeavor 2) invasion 3) analogy 4) arena
- 3- Do you know of an alternate route we could take to ----- having to drive through the city?
1) circumvent 2) delight in 3) partake of 4) suggest
- 4- My political science professor presents her lectures in a relaxed manner using ----- rather than elaborate language.
1) loquacious 2) colloquial 3) literary 4) inflated
- 5- My uncle, a farmer, is an ----- pessimist when he discusses the weather. For example, if the sun is shining, he's sure a drought is beginning; if it's raining, he's sure his crops will be washed away.
1) initial 2) instant 3) immutable 4) interactive
- 6- The pharmaceutical company had to ----- its advertising claim regarding the healing power of its new arthritis medicine because research studies clearly indicate the medicine isn't effective.
1) repudiate 2) enhance 3) distribute 4) replicate
- 7- It's an ----- to their friends as to why the couple broke up because they seem perfect for each other.
1) interference 2) inference 3) alteration 4) enigma
- 8- Mr. Baker has decided to move to a big city because of a ----- of employment opportunities in his small hometown.
1) demonstration 2) foundation 3) trace 4) dearth

- 9- There are many good reasons for not smoking, but those having to do with health are the most -----.
- 1) passionate 2) cogent 3) paradoxical 4) accidental
- 10- ----- therapy is a psychological approach designed to help individuals change harmful thought patterns to more constructive ones.
- 1) Inherent 2) Thoughtful 3) Cognitive 4) Epidemiological

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

The earliest human artifacts showing evidence of workmanship with an artistic purpose (11) ----- the subject of some debate. It is clear that such workmanship existed some 40,000 years ago in the Upper Paleolithic era, (12) ----- it is quite possible that it began earlier. In September 2018, scientists (13) ----- the discovery of (14) ----- by *Homo sapiens*, which is estimated to be 73,000 years old, much earlier than the 43,000-year-old artifacts (15) ----- to be the earliest known modern human drawings found previously.

- 11- 1) are 2) is 3) has been 4) was
- 12- 1) as 2) when 3) since 4) although
- 13- 1) who reported 2) reported 3) having reported 4) to report
- 14- 1) known drawing the earliest 2) the earliest drawing was known
- 3) the earliest known drawing 4) known as the earliest drawing
- 15- 1) that understand 2) understood
- 3) were understood 4) they are understood

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

Iterative approach. To solve nonlinear problems, iterative methods seem natural.

There are at least two ways to conduct the iteration for IEPs: Newton iterations and the orthogonal reduction method.

The Newton iterations are conventional Newton methods modified by taking advantage of matrix properties. We cite the article by Friedland et al. (1986) as a typical representative work in this area. There are many variations. This class of methods is fast but converges only locally and requires initial approximations. In addition, the methods have to be further adapted in the presence of multiple eigenvalues.

Orthogonal reduction methods include the Lanczos method. The basic idea is to iteratively approximate eigenvectors by employing some QR-like decompositions and

then construct an approximate matrix. For the Jacobi inverse eigenvalue problem, this iteration terminates in a finite number of steps. For other structural constraints, such as the Toeplitz inverse eigenvalue problem, this iteration is terminated only after some stopping criteria are met. On the other hand, since this class of methods works directly with eigenvectors, the case of multiple eigenvalues usually can be easily handled.

Continuous approach. By a continuous method, we mean a procedure that connects an initial value to the desired solution through a "continuous path" defined by a certain differential equation. The problem is then unraveled by tracing a specific integral curve of this differential equation. There are at least three ways to exploit this idea: the homotopy method, the projected gradient method, and the ASVD flow method.

The homotopy method builds the continuous path between two problems in a topological space with the hope that the artificial but simpler problem can be deformed in a continuous (homotopic) way so that at the end it coincides with the original but harder problem. In this process, the trivial solution to the simpler problem is also mathematically deformed into a solution to the harder problem. This method has been attractive for solving general nonlinear systems mainly because of its globally convergent property. When the homotopy is efficacious, it provides both an existence proof and a numerical method.

- 16- **The Lanczos method -----.**
 1) is an iterative method
 2) is a direct approach for solving IEPs
 3) reduces to the conventional Newton method
 4) has a slow local rate of convergence
- 17- **The phrase "stopping criteria" in paragraph 3 is similar in meaning to -----.**
 1) holding rules
 2) dropping conditions
 3) cancelation rules
 4) termination conditions
- 18- **The Newton iterative approach comprises a class of methods -----.**
 1) being globally convergent
 2) having good local convergence properties
 3) being fast in the presence of multiple eigenvalues
 4) not being effectively useful when multiple eigenvalues arise
- 19- **Which of the following best describes a projected gradient method?**
 1) It traverses a continuous path iteratively.
 2) It is a numerical approach to solving differential equations.
 3) It makes use of a differential equation representing a path towards a solution.
 4) It is a continuous approach being globally convergent while not having useful local convergence properties.
- 20- **Due to global convergence properties, the homotopy method ----- for solving nonlinear systems.**
 1) is rarely used
 2) is practically improper
 3) is effectively appropriated
 4) cannot effectively be used

PASSAGE 2:

Classical mathematical analysis — and most of its modern abstract extensions — rests ultimately on the real numbers. The idea of the real number continuum (i.e., the real

line) has played a dominant role in much of pure and applied mathematics. For example, the ordinary and partial differential equations which arise in the physical sciences are based on the real continuum. Its influence extends beyond the boundaries of analysis to other branches of mathematics, such as geometry, topology, and algebra. Yet the intuitive basis of the continuum has always been open to question, whereas the intuitive basis of the integers has, by and large, been free of doubt. This led nineteenth-century mathematicians (Cauchy, Weierstrass, Dedekind, and Cantor) to attempt to "arithmetize" the real number system by establishing its foundation in the integers. At the turn of the century, the achievements of these mathematicians in this endeavor were generally regarded as entirely successful. In 1900, Poincare made his oft-quoted assertion, "Today there remains in analysis only integers and finite or infinite systems of integers." The equally famous remark of Kronecker, "God made the integers; all the rest is the work of man," was made in 1886. The supposedly rigorous foundation of the real continuum required a "theory of sets," and this was developed by Cantor. (A rational number is an equivalence class of pairs of integers. A real number is a "cut" separating two sets of rationales.)

Unfortunately, at about the time the continuum was placed on a supposedly firm foundation, certain paradoxes were discovered in the theory of sets which cast doubt on the entire development. Although these paradoxes have been eliminated in the modern theory of sets, one cannot yet say that others will not arise. Furthermore, there are other objections which, although of a logical nature, are also of practical importance. In a certain strict technical sense, the continuum is not a constructively defined set. In fact, only a denumerable set of real numbers is computable by a machine (e.g., by a Turing machine). Also, many of the theorems of real analysis are proved in a nonconstructive manner, e.g., the existence of a point at which a continuous function on a closed bounded interval assumes its least upper bound is proved by methods which do not tell us how to construct the point. This has led to a recent redevelopment of analysis by constructive techniques.

However, analysis based on the continuum (nonconstructive) continues to thrive. Here we accept the classical real continuum and the nonconstructive theory of real and complex functions and anchor one end of the numerical analysis bridge to it. Strictly speaking, the other end should be firmly fixed in the integers and the theory of recursive functions, since the final results of numerical analysis should be effective (in the Turing sense) algorithms for digital computers. The practice and theory of numerical analysis is concerned — in large part — with bridging the gap between nonconstructive real analysis and constructive discrete mathematics. Fortunately, we need not bridge the entire gap to provide a useful body of knowledge. We do not have space to enter into a discussion of the technical questions concerning constructivity in mathematics.

- 21- The word "denumerable" in paragraph 2 is similar in meaning to -----.
- | | |
|--------------|------------------|
| 1) countable | 2) controllable |
| 3) numerical | 4) non-numerical |

- 22- **The real number continuum has played a major role in analysis -----.**
 1) has not influenced other areas of mathematics
 2) and has been effectively used in some other areas of mathematics
 3) and only an appropriate extension of it has been used in physical sciences
 4) but has had a limited use in other areas of mathematics
- 23- **Nowadays, the real number continuum -----.**
 1) is effectively computable by a Turing machine
 2) still plays an effective role in analysis
 3) is constructively defined, in practice
 4) is now defined free of doubt, as for the integers, thanks to the investigations made by mathematicians
- 24- **The development of constructive algorithms has been made possible by -----.**
 1) Turing machines
 2) discrete mathematics
 3) numerical analysis
 4) the use of theory of sets due to Cantor
- 25- **The gap between nonconstructive real analysis and constructive discrete mathematics ----- in order to come up with practical algorithms.**
 1) needs to be entirely bridged
 2) has been entirely disregarded
 3) needs not to be entirely bridged
 4) has been entirely bridged by numerical analysis

PASSAGE 3:

We have studied the low rank circulant approximation problem. For any given real data matrix, its nearest real circulant approximation can simply be determined from the average of its diagonal entries. Its nearest lower rank approximation can also be determined effectively from the truncated singular value decomposition and the fast Fourier transform. To maintain the circulant structure, to induce a specific lower rank, and to stay real, however, the conjugate-even structure must be taken into account and that can substantially change the truncation criteria. We have proposed a fast algorithm to accomplish all of these objectives, and extensions to the block case with possible applications to image reconstruction are discussed.

An indispensable task in almost every discipline of science is to analyze certain data to search for relationships between a set of exogenous and endogenous variables. The exigencies of such a task become especially strong in this era of information and digital technologies as massive amounts of data are being generated at almost every level of application.

It is generally acknowledged that most of the information gathering devices or methods at present have only finite bandwidth. One thus cannot avoid the fact that the data collected often are not exact. For example, signals received by antenna arrays often are contaminated by atmospheric turbulence; data-bases prepared by document indexing often are biased by subjective judgment; and even empirical data obtained in laboratories often do not satisfy intrinsic physical constraints. Before any deductive sciences can be applied further, it is important to first reconstruct the data matrices so that the inexactness is reduced while certain feasibility conditions are satisfied.

Furthermore, in many situations the data observed from complex phenomena represent the integrated result of several interrelated variables acting together. When those variables are less precisely defined, the actual information contained in the original data matrix might be overlapping, fuzzy, and no longer that clear-cut. A reduced system might provide the same level of fidelity as the original system.

- 26- The word "empirical" in paragraph 3 is similar in meaning to -----.
- 1) experimental 2) theoretical 3) unconstrained 4) exact
- 27- The observed data corresponding to complex phenomena -----, when the underlying interrelated variables are vaguely defined.
- 1) may be used as exact data for a reduced system
2) cannot fit in the original data matrix
3) is deemed to be useless
4) can be considered to be fuzzy
- 28- Singular value decomposition and fast Fourier transforms are ----- an optimal lower rank approximation.
- 1) practically used to compute
2) not effective for computing
3) improperly used to construct
4) the only effective tools for computing
- 29- Inexactness of data -----.
- 1) cannot be resolved effectively
2) is not a concern in an empirical study
3) is no obstacle for a scientific application
4) admits a major deterrence in a scientific application
- 30- Which of the following statements is correct?
- 1) Only exact data can be used in any scientific investigation.
2) Empirical data is inappropriate for any deductive science application.
3) Inexactness of data is not a major concern, but the feasibility conditions are ultimately decisive.
4) Reducing the inexactness of data under the imposed physical conditions can contribute to a more effective application of any scientific investigation.

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال) :

$$۳۱- \text{ مقدار } (1 + \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5})^5 + i(1 + \sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5})^5 \text{ کدام است؟ } (i^2 = -1)$$

۱) ۱

۲) $-i$

۳) i

۴) ۱

۳۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$ کدام است؟

(۱) ۰

(۲) $\frac{4}{e}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{1}{e}$

۳۳- فرض کنید دنباله (a_n) یکنوا و سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. کدام گزینه درباره سری $\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})$ درست است؟

(۱) همگرا است.

(۲) دنباله مجموع جزئی آن یکنوا است، ولی لزوماً کران دار نیست.

(۳) دنباله مجموع جزئی آن کران دار است، ولی لزوماً همگرا نیست.

(۴) لزوماً جمله عمومی آن به صفر میل نمی کند، لذا همگرایی نتیجه نمی شود.

۳۴- کدام گزینه درباره تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sin(\pi(x - [x]))$ درست است؟ ([.] نماد جزء صحیح است.)

(۱) دارای تابع اولیه کران دار است.

(۲) پیوسته نیست.

(۳) پیوسته است، ولی مشتق پذیر نیست.

(۴) مشتق پذیر است.

۳۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (e^{-2x} - \frac{1+ax}{1+bx}) = 0$ ، آنگاه مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) ۰

(۳) ۱

(۴) ۲

۳۶- مقدار $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{e}{3} - 1$

(۲) $\frac{e}{2} + 1$

(۳) $\frac{e}{3} + 1$

(۴) $\frac{e}{2} - 1$

۳۷- اگر a, b اعداد مثبت باشند، آنگاه طول منحنی تابع $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ بر بازه $[-b, b]$ کدام است؟

(۱) $2a \cosh\left(\frac{b}{a}\right)$

(۲) $2b \sinh\left(\frac{b}{a}\right)$

(۳) $2a \sinh\left(\frac{b}{a}\right)$

(۴) $2b \cosh\left(\frac{b}{a}\right)$

۳۸- فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد و داشته باشیم $f(0, 1) = 0$ ،

$f_x(0, 1) = 1$ و $f_y(0, 1) = 2$. مقدار $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t, e^t)}{f(\sin 2t, \cos 2t)}$ کدام است؟

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۳۹- فرض کنید $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 2x^2, y^2 \leq x \leq 2y^2\}$. مقدار $\iint_D xye^{\frac{x^2+y^2}{xy}} dx dy$ کدام است؟

(۱) $\frac{e}{12}$

(۲) $\frac{3e}{4}$

(۳) $\frac{e}{4}$

(۴) $\frac{e}{20}$

۴۰- فرض کنید C منحنی فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $z = y + 1$ در جهت راستگرد باشد. مقدار

$\oint_C (4z dx - 2x dy + 2x dz)$ کدام است؟

(۱) 4π

(۲) $-2\sqrt{2}\pi$

(۳) -4π

(۴) $2\sqrt{2}\pi$

۴۱- اگر $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$ با شرایط اولیه

$x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$ باشد، آنگاه $x(\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

$$(1) \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{6}}, -2e^{\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} -e^{\frac{\pi}{6}}, 2e^{\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{6}}, -2e^{\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} -e^{\frac{\pi}{6}}, 2e^{\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix}$$

۴۲- اگر تابع y جواب معادله دیفرانسیل $y'' = 2y^3 - 2y$ با شرایط اولیه $y(0) = 0, y'(0) = 1$ باشد، آنگاه $y(1)$ کدام است؟

$$(1) \frac{1+e^2}{1-e^2}$$

$$(2) \frac{e^2+1}{e^2-1}$$

$$(3) \frac{1-e^2}{1+e^2}$$

$$(4) \frac{e^2-1}{e^2+1}$$

۴۳- اگر تابع y جواب معادله $y'' + y = \sec x$ باشد آنگاه $y'(\pi) + y'(0)$ کدام است؟

$$(1) -\pi$$

$$(2) 0$$

$$(3) \frac{\pi}{2}$$

$$(4) \pi$$

۴۴- اگر $F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s^2+29s}$ تبدیل لاپلاس تابع f باشد، آنگاه $f(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

$$(1) \frac{\Delta e^{-\pi} - 2}{29}$$

$$(2) \frac{2e^{-\pi} + \Delta}{29}$$

$$(3) \frac{\Delta e^{-\pi} + 2}{29}$$

$$(4) \frac{2e^{-\pi} - \Delta}{29}$$

۴۵- یک جواب برای معادله دیفرانسیل $x^2(x-1)y'' + x(x-3)y' + (x^2-1)y = 0$ به صورت کدام گزینه است؟
($x > 0, a_0 \neq 0$)

$$(1) y = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$(2) y = \frac{\ln x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$(3) y = \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$(4) y = \frac{\ln x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

۴۶- فرض کنید $P \subseteq \mathbb{N}$. کدام گزاره معادل گزاره زیر است؟

$$n \notin P \Rightarrow \exists p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \wedge p \mid n)$$

$$(1) \forall p(p \in P \wedge \sqrt{n} \leq p \wedge p \nmid n) \Rightarrow n \in P$$

$$(2) \forall p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \Rightarrow p \nmid n) \Rightarrow n \in P$$

$$(3) \forall p(p \in P \vee \sqrt{n} \leq p \vee p \nmid n) \Rightarrow n \in P$$

$$(4) \forall p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \vee p \nmid n) \Rightarrow n \in P$$

۴۷- فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه باشند. ضرب دکارتی به $\times$ و تفاضل متقارن به Δ نمایش داده می شود.

ضمناً $X \setminus Y$ به منزله مکمل Y نسبت به X است. کدام گزینه درست است؟

$$(1) (A \times B) \setminus (B \times A) = (A \setminus B) \times (B \setminus A)$$

$$(2) (A \Delta B) \times (A \Delta B) = (A \times A) \Delta (B \times B)$$

$$(3) (A \setminus B) \times (A \setminus B) = (A \times A) \setminus (B \times B)$$

$$(4) (A \cap B) \times (A \cap B) = (A \times A) \cap (B \times B)$$

۴۸- فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا و X مجموعه‌ای نامتناهی باشد. کدام گزاره درست است؟

- (۱) اگر $f: X \rightarrow X$ پوشا باشد، آنگاه f یک‌به‌یک است. (۲) اگر $f: X \rightarrow X$ یک‌به‌یک باشد، آنگاه f پوشا است.
(۳) تابعی پوشا مانند $f: X \rightarrow \mathbb{Q}$ وجود دارد. (۴) تابعی یک‌به‌یک مانند $f: X \rightarrow \mathbb{Q}$ وجود دارد.

۴۹- فرض کنید $A \equiv B$ به مفهوم هم‌عدد بودن A و B و $A < B$ به مفهوم هم‌عدد بودن A با زیرمجموعه‌ای از B باشد ولی B با هیچ زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد نباشد. اگر $A \equiv B$ و $C \equiv D$ ، کدام گزاره درست است؟

- (۱) $A < C$ اگر و فقط اگر $B < D$
(۲) $A \cup C \equiv B \cup D$
(۳) $A \cap C \equiv B \cap D$
(۴) $A \times B \equiv C \times D$

۵۰- فرض کنید α, β, γ اعداد اصلی نامتناهی (ترامتناهی) باشند. کدام گزینه درست است؟

$$(1) \quad (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta^\gamma}$$

$$(2) \quad \text{اگر } \alpha < \beta \text{ آنگاه } \alpha^\gamma < \beta^\gamma$$

$$(3) \quad \text{اگر } \alpha < \beta \text{ آنگاه } \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

$$(4) \quad \text{اگر } \alpha < \beta < \gamma \text{ آنگاه } \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

۵۱- فرض کنید A و B ماتریس‌های مربعی باشند. کدام یک از گزاره‌های زیر درباره دترمینان آن‌ها نادرست است؟

$$(1) \quad \det(AB) = \det(BA)$$

$$(2) \quad \det(I - BA) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } \det(I - AB) = 0$$

$$(3) \quad \det(A + B^t) = \det(A^t + B) \text{ که در آن منظور از } A^t \text{ ترانهاد ماتریس } A \text{ است.}$$

$$(4) \quad \det(\text{adj}(B)) = \det(B) \text{ که در آن منظور از } \text{adj}(B) \text{ الحاقی ماتریس } B \text{ است.}$$

۵۲- فرض کنید $T: V \rightarrow V$ یک عملگر خطی باشد به طوری که $\text{Im } T = \ker T$. در این صورت کدام یک از گزینه‌ها در مورد بعد V می‌تواند صحیح باشد؟

$$(2) \quad \dim V = 5$$

$$(1) \quad \dim V = 1$$

$$(4) \quad \dim V = 9$$

$$(3) \quad \dim V = 6$$

۵۳- فرض کنید V یک فضای برداری از بعد 10 روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $f, g: V \rightarrow \mathbb{F}$ دو تبدیل خطی باشند. اگر $\ker f$ و $\ker g$ هیچ یک زیرمجموعه دیگری نباشند، در این صورت بعد $\ker f \cap \ker g$ برابر است با:

$$(1) \quad \text{صفر}$$

$$(2) \quad 8$$

$$(3) \quad 9$$

$$(4) \quad 10$$

۵۴- تعداد ماتریس‌های $A \in M_7(\mathbb{R})$ به طوری که $A^2 = -I$ برابر است با:

$$(1) \quad \text{صفر}$$

$$(2) \quad 1$$

$$(3) \quad 2$$

$$(4) \quad \text{بی‌نهایت}$$

۵۵- فرض کنیم $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ مقدار $\det(I_6 + XX^t)$ کدام است؟

(۱) ۱۷

(۲) -۱۸

(۳) -۱۷

(۴) ۱۸

۵۶- اگر $A, B \subseteq \mathbb{R}$ و $A^\circ, \bar{A}$ به ترتیب درون و بستار A باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$

(۲) $(A \cup B)^\circ \subseteq A^\circ \cup B^\circ$

(۳) $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

(۴) $\overline{(A \setminus B)} = \bar{A} \setminus \bar{B}$

۵۷- مقدار انتگرال ریمان بالای و انتگرال ریمان پائینی تابع زیر به ترتیب کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in Q \cap [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos x & x \in Q^c \cap [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

(۱) 1 و $\sqrt{2}$

(۲) 1 و $2 - \sqrt{2}$

(۳) 1 و 1

(۴) $\sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$

۵۸- فرض کنید $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی پیوسته یکنواخت باشند و $-\infty \leq a < b \leq \infty$. کدام شرط پیوستگی

یکنواخت fg را ایجاب نمی‌کند؟

(۱) $-\infty < a < b < \infty$.

(۲) توابع f و g کراندار هستند.

(۳) حد تابع f در a و b موجود و متناهی است.

(۴) توابع f^2 و g^2 و $(f+g)^2$ پیوسته یکنواخت هستند.

۵۹- فرض کنید $A = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ و $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n}$. کدام گزینه درست است؟

(۱) هر دو سری A و B واگرا هستند.

(۲) هر دو سری A و B همگرا هستند.

(۳) سری A همگرا و سری B واگراست.

(۴) سری B همگرا و سری A واگراست.

۶۰- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه ناصفر مشتق مرتبه دوم دارد به طوری که برای هر $x < 0$ ، $f'(x) < 0 < f''(x)$ و برای هر $x > 0$ ، $f'(x) > 0 > f''(x)$. کدام گزینه درست است؟

(۱) f در صفر مشتق پذیر نیست.

(۲) f در صفر مشتق پذیر است و $f'(\circ) < 0$.

(۳) f در صفر مشتق پذیر است و $f'(\circ) = 0$.

(۴) f در صفر مشتق پذیر است و $f'(\circ) > 0$.

۶۱- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده در مبنای ۲، هر عدد حقیقی به صورت $\pm(\circ/d_1d_2d_3) \times 2^{\pm d_4d_5}$ نمایش

داده می شود که d_i ها ارقام دودویی هستند. فرض کنید که در نمایش عدد حقیقی، ارقام اضافی بریده می شوند.

کوچک ترین عدد مثبت قابل نمایش و روند عدد یک به ترتیب برابرند با

(۱) 2^{-2} و 2^{-4}

(۲) 2^{-2} و 2^{-6}

(۳) 2^{-3} و 2^{-4}

(۴) 2^{-3} و 2^{-6}

۶۲- در روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن برای درون یابی داده های جدول زیر، اگر $f[1,2,3] = a-1$ ، آنگاه مقدار a

کدام است؟

x_i	-۱	۱	۲	۳
f_i	۲	۱	-۱	۰

(۱) ۱

(۲) $\frac{5}{2}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) $\frac{1}{2}$

۶۳- تخمین $f(x) = \cos 4x$ در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ با توابع تکه‌ای خطی مدنظر است. طول زیر بازه‌ها با طول برابر در این

بازه حداکثر چقدر باشد تا کران بالای خطای برشی تخمین در این بازه کم‌تر یا مساوی با 2×10^{-6} باشد؟

(۱) 0.005

(۲) 0.05

(۳) 0.01

(۴) 0.001

۶۴- اگر A یک ماتریس $m \times n$ با ستون‌های مستقل خطی باشد، آن‌گاه x^* جواب مسأله $\min_t \|A^T A x - b\|_2$...

(۱) یکتا نیست و $t \neq 0$

(۲) یکتاست و $t = 0$

(۳) یکتا نیست و $t = 0$

(۴) یکتاست و $t \neq 0$

۶۵- مقادیر A و B را برای تخمین انتگرال $\int_0^\pi f(x) dx \approx Af(0) + Bf(\pi)$ کدام باشد تا تخمین به‌دست آمده برای

توابع به‌صورت $a + b \cos x$ ، به‌ازای همه مقادیر a و b ، همان جواب دقیق انتگرال باشد؟

(۱) $A = B = \pi$

(۲) $B = 0, A = \pi$

(۳) $A = B = \frac{\pi}{2}$

(۴) $B = \pi, A = 0$

۶۶- سه عدد را با میانگین μ و واریانس σ^2 در نظر بگیرید. از کوچک‌ترین داده سه واحد کم می‌کنیم، میانگین و

واریانس داده‌های جدید η و τ^2 می‌شود. در این صورت کدام مورد درست است؟

(۱) $\eta < \mu$ و $\tau^2 < \sigma^2$

(۲) $\eta > \mu$ و $\tau^2 > \sigma^2$

(۳) $\eta < \mu$ و $\tau^2 > \sigma^2$

(۴) $\eta > \mu$ و $\tau^2 < \sigma^2$

۶۷- سه نفر A و B و C سوار یک آسانسور هستند که می‌توانند در یکی از سه طبقه ساختمان پیاده شوند. فرض کنید

هر فرد مستقل از دیگران پیاده می‌شود و شانس پیاده شدن هر شخص در هر طبقه‌ای یکسان است. احتمال اینکه

در هر طبقه دقیقاً یک نفر پیاده شود کدام است؟

(۱) $\frac{2}{9}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۴) $\frac{1}{6}$

۶۸- ۵ مهره ناهم رنگ را به تصادف در ۵ ظرف به شماره‌های ۱ تا ۵ می‌ریزیم. احتمال اینکه در ظرف‌های با شماره فرد فقط یک مهره قرار گیرد کدام است؟

- (۱) $\frac{48}{625}$
 (۲) $\frac{36}{625}$
 (۳) $\frac{32}{225}$
 (۴) $\frac{32}{125}$

۶۹- عددهای سه‌رقمی که رقم‌های آن از مجموعه $\{1, \dots, 9\}$ است را در نظر بگیرید. چه تعداد از این عددها دو رقم پی‌درپی یکسان ندارند؟

- (۱) ۵۶۷
 (۲) ۵۷۶
 (۳) ۵۳۷
 (۴) ۵۷۳

۷۰- احتمال برنده شدن شخصی در یک بازی شانسی $\frac{9}{19}$ است. احتمال این که تعداد دفعات لازم برای برنده شدن این شخص عددی فرد باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{10}{19}$
 (۲) $\frac{10}{29}$
 (۳) $\frac{9}{19}$
 (۴) $\frac{19}{29}$

آنالیز ریاضی:

۷۱- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد که هر زیر مجموعه متناهی آن باز است. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) هر زیر مجموعه X ، کراندار است.
 (۲) هر زیر مجموعه X ، باز است.
 (۳) هر زیر مجموعه متناهی X ، بسته است.
 (۴) مرز هر زیر مجموعه X ، تهی است.

۷۲- فرض کنید A زیرمجموعه ناشمارا از فضای متریک (X, d) باشد. کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر مجموعه A در X چگال باشد، آنگاه مجموعه نقاط درونی A یا مجموعه نقاط درونی A^c ناتهی است.
 (۲) اگر مجموعه A در X چگال باشد، آنگاه مجموعه نقاط حدی A ناتهی است.
 (۳) اگر مجموعه A در X چگال باشد، آنگاه مجموعه نقاط تنهای A شمارا است.
 (۴) اگر مجموعه نقاط حدی A در X چگال باشد، آنگاه مجموعه A نیز در X چگال است.

- ۷۳- فرض کنید Y یک فضای متریک و $f: [0,1] \rightarrow Y$ یک تابع پیوسته غیر ثابت باشد. کدام گزینه درست است؟
 (۱) Y می تواند شمارا باشد.
 (۲) f نقطه حدی دارد.
 (۳) متر روی Y می تواند متر گسسته باشد.
 (۴) Y فشرده است.
- ۷۴- مجموعه $Y = [0,1] \cup [2,4]$ را با متر اقلیدسی در نظر می گیریم و $E = [2,4]$. کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) E در Y باز است.
 (۲) E در Y بسته است.
 (۳) E در Y فشرده است.
 (۴) E در Y تام است (یعنی $E = E'$).
- ۷۵- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک است و $E \subseteq X$. کدام گزینه معادل فشردگی E است؟
 (۱) E بسته و کراندار است.
 (۲) هر زیر مجموعه نامتناهی از E ، یک نقطه حدی در E دارد.
 (۳) هر دنباله کوشی در E به نقطه ای از E همگرا است.
 (۴) برای هر $\varepsilon > 0$ ، مجموعه E را می توان به وسیله تعداد متناهی گوی باز به شعاع ε پوشاند.
- ۷۶- فرض کنیم X, Y و Z سه فضای متریک باشند که فضای Y فشرده است. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک تابع و $g: Y \rightarrow Z$ تابعی یک به یک باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) اگر f و gof پیوسته یکنواخت باشند، آنگاه g پیوسته است.
 (۲) اگر g پیوسته و f پیوسته یکنواخت باشد، آنگاه gof پیوسته یکنواخت است.
 (۳) اگر g پیوسته و gof پیوسته یکنواخت باشد، آنگاه f پیوسته یکنواخت است.
 (۴) اگر g و gof پیوسته باشند، آنگاه f پیوسته است.
- ۷۷- فرض کنید $f: (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ تابعی پیوسته باشد و $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq f(x) \leq 5\}$. کدام گزینه درست است؟
 (۱) $(A, |\cdot|)$ همبند است.
 (۲) $\partial A = A$ (مرز A).
 (۳) $(A, |\cdot|)$ فضای متریک کامل (complete) است.
 (۴) هر دنباله در A دارای زیر دنباله ای همگرا در A است.
- ۷۸- فرض کنید $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ یک تابع باشد. کدام گزینه با پیوستگی تابع f معادل نیست؟
 (۱) $\forall B \subseteq Y \left(f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ \right)$
 (۲) $\forall A \subseteq X \left(f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \right)$
 (۳) $\forall A \subseteq X \left(f(A^\circ) \subseteq \overline{f(A)} \right)$
 (۴) $\forall B \subseteq Y \left(\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B}) \right)$
- ۷۹- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $E \subseteq Y \subseteq X$. اگر بستر و درون E نسبت به Y را به ترتیب با $\bar{E}^Y$ و E°^Y نشان دهیم، کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) اگر Y بسته باشد، آنگاه $\bar{E}^Y = Y \cap \bar{E}^X$
 (۲) اگر Y باز باشد، آنگاه $E^\circ^Y = Y \cap E^\circ^X$
 (۳) اگر Y باز باشد، آنگاه $\bar{E}^Y = Y \cap \bar{E}^X$
 (۴) اگر Y بسته باشد، آنگاه $E^\circ^Y = Y \cap E^\circ^X$

۸۰- فرض کنید E زیر مجموعه‌ای ناتهی از فضای متریک (X, d) باشد و $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$ کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر E هم بسته و هم باز باشد، آنگاه f بر X پیوسته است.

(۲) اگر مرز E تهی باشد، آنگاه f بر X پیوسته است.

(۳) اگر E نقطه حدی نداشته باشد، آنگاه f بر X پیوسته است.

(۴) اگر E مجموعه‌ای بسته باشد، آنگاه f بر E^c پیوسته است.

۸۱- فرض کنید سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به ازای $x=1$ همگرا و به ازای $x=2$ واگرا است. اگر r شعاع همگرایی این

سری توانی باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $r \in [1, 2]$

(۲) $r \in [1, 2)$

(۳) $r \in (1, 2)$

(۴) $r \in (1, 2]$

۸۲- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای در بازه $[0, 1]$ باشد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} < \frac{n}{n+1} a_n^2$ و R شعاع همگرایی

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) $R = 0$

(۲) $R \geq 1$ ولی لزوماً نامتناهی نیست.

(۴) $R = \infty$

(۳) $R \leq 1$ ولی لزوماً صفر نیست.

۸۳- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی باشد که بر $\mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت به تابع f همگراست. اگر تابع

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $f_n + g \rightarrow f + g$ به‌طور یکنواخت بر $\mathbb{R}$

(۲) $f_n g \rightarrow fg$ به‌طور یکنواخت بر $\mathbb{R}$

(۳) $f_n \circ g \rightarrow f \circ g$ به‌طور یکنواخت بر $\mathbb{R}$

(۴) $g \circ f_n \rightarrow g \circ f$ به‌طور یکنواخت بر $\mathbb{R}$

۸۴- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی باشد که بر $\mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت به تابع f همگرا است. به ازای کدام تابع

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دنباله $\{g \circ f_n\}$ بر $\mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت به $g \circ f$ همگرا است؟

(۱) $g(x) = e^x$

(۲) $g(x) = \text{Arctg} x$

(۳) $g(x) = \sin(x^2)$

(۴) $g(x) = x^2$

۸۵- فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال پذیر و دنباله $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به تابع f همگرا

باشد. کدام گزینه درباره همگرایی دنباله $\left\{ \int_0^\infty f_n(x) dx \right\}$ درست است؟

(۱) اگر دنباله $\{f_n\}$ هم پیوسته باشد، آنگاه دنباله همگرا است.

(۲) اگر دنباله $\{f_n\}$ یکنوا باشد، آنگاه دنباله همگرا است.

(۳) در صورتی که دنباله همگرا باشد، مقدار حد آن برابر با $\int_0^\infty f(x) dx$ است.

(۴) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $x \in [0, \infty)$ ، $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$ باشد، آنگاه دنباله همگرا است.

۸۶- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مشتق پذیر بر بازه $[a, b]$ باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر همگرایی $f_n \rightarrow \circ$ بر $[a, b]$ یکنواخت باشد، آنگاه همگرایی $f'_n \rightarrow \circ$ نیز بر $[a, b]$ یکنواخت است.

(۲) اگر همگرایی $f_n \rightarrow \circ$ بر $[a, b]$ نقطه‌ای باشد، آنگاه همگرایی $f'_n \rightarrow \circ$ بر $[a, b]$ نیز نقطه‌ای است.

(۳) اگر همگرایی‌های $f_n \rightarrow \circ$ و $f'_n \rightarrow \circ$ بر $[a, b]$ نقطه‌ای باشند، آنگاه همگرایی $f'_n \rightarrow \circ$ یکنواخت است.

(۴) اگر همگرایی $f_n \rightarrow \circ$ بر $[a, b]$ نقطه‌ای و همگرایی f'_n بر $[a, b]$ یکنواخت باشد، آنگاه همگرایی $f'_n \rightarrow \circ$ یکنواخت است.

۸۷- فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع $f_n : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ پیوسته و سری $\sum_{n=1}^\infty f_n$ بر $[a, b]$ نقطه‌ای به تابع f

همگرا باشد. کدام گزینه همگرایی یکنواخت این سری را نتیجه می‌دهد؟

(۱) f کراندار است. (۲) f پیوسته است.

(۳) دنباله $\{f_n\}$ نزولی است. (۴) دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت کراندار است.

۸۸- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی بر $\mathbb{R}$ باشد، که نقطه‌ای به تابع f همگرا است. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$

باشد که $x_n \rightarrow a$ ، کدام گزینه تساوی $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(a)$ را نتیجه نمی‌دهد؟

(۱) دنباله $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به f باشد.

(۲) دنباله $\{f_n\}$ هم پیوسته باشد.

(۳) توابع f و f_n پیوسته باشند و دنباله $\{f_n\}$ یکنوا باشد.

(۴) توابع f_n مشتق پذیر باشند و دنباله $\{f'_n\}$ همگرای یکنواخت باشد.

۸۹- کدام یک از دنباله‌های توابع زیر هم پیوسته است؟

(۱) $f_n(x) = \frac{2}{\pi} x \operatorname{Arctg} nx$ بر $[-1, 1]$

(۲) $f_n(x) = nx^2$ بر $[0, 1]$

(۳) $f_n(x) = \frac{n}{x}$ بر $[1, 2]$

(۴) $f_n(x) = \sin nx$ بر $\mathbb{R}$

- ۹۰- فرض کنید $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) دنباله‌ای از چند جمله‌ای‌ها با ضرایب گویا وجود دارد که به‌طور یکنواخت به f همگرا است.
 (۲) دنباله‌ای از چند جمله‌ای فرد وجود دارد که به‌طور یکنواخت به f همگرا است.
 (۳) دنباله‌ای از چند جمله‌ای‌ها وجود دارد که به‌طور یکنواخت به f همگرا است.
 (۴) دنباله‌ای از چند جمله‌ای‌ها با ضرایب گنگ وجود دارد که به‌طور یکنواخت به f همگرا است.

مبانی جبر و مبانی ترکیبیات:

- ۹۱- اگر P حاصل ضرب کلیه عناصر یک گروه آبلی متناهی دلخواه باشد، آنگاه داریم:

$$P = e \quad (۱)$$

$$P^2 = e \quad (۲)$$

$$P^3 = e \quad (۳)$$

$$P \neq e \quad (۴)$$

- ۹۲- فرض کنید G یک گروه باشد، همه موارد زیر صحیح‌اند، به‌جز:

$$Z(G) \leq G \quad (۱)$$

$$\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}(G) \quad (۲)$$

$$\text{اگر } f: G \rightarrow H \text{ یک همریختی از گروه‌ها باشد، آنگاه } \ker(f) \leq G \quad (۳)$$

$$\text{اگر } f: G \rightarrow H \text{ یک همریختی از گروه‌ها باشد، آنگاه } \text{Im}(f) \leq H \quad (۴)$$

- ۹۳- فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی است و I یک ایده‌آل از R ، رادیکال I چنین تعریف می‌شود:

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \exists n, x^n \in I\}$$

$$\text{اگر } R = F[x] \text{ که در آن } F \text{ یک میدان است و } I = (x^2), \text{ آنگاه } \sqrt{I} \text{ کدام است؟}$$

$$\circ \quad (۱)$$

$$(x^2) \quad (۲)$$

$$(x) \quad (۳)$$

$$F \quad (۴)$$

- ۹۴- تعداد عناصر مرتبه ۲ در گروه $S_3 \times S_3$ چند تا است؟ (منظور از S_3 گروه متقارن روی ۳ حرف است.)

$$۶ \quad (۱)$$

$$۹ \quad (۲)$$

$$۱۵ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۴)$$

- ۹۵- گروه جمعی $\mathbb{Q}$ و زیرگروه $\mathbb{Z}$ از آن را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ کدام خاصیت زیر را داراست؟

$$(۱) \text{ گروهی متناهی است.}$$

$$(۲) \text{ گروهی دوری است.}$$

$$(۳) \text{ گروهی با تولید متناهی است.}$$

$$(۴) \text{ به ازای هر } n \in \mathbb{N} \text{ عضوی از مرتبه } n \text{ دارد.}$$

۹۶- اگر $I = (x, 2)$ و $J = (x, 3)$ در این صورت در $\mathbb{Z}[x]$ ، IJ کدام ایده‌آل است؟ (منظور از (a, b) ، ایده‌آل تولید شده توسط a و b می‌باشد.)

$$(1) (x, 6)$$

$$(2) (x, 2)$$

$$(3) (x^2, 2)$$

$$(4) (x^2, 6)$$

۹۷- اگر H یک زیر گروه G باشد، در کدام یک از گزینه‌های زیر H می‌تواند یک زیر گروه نرمال از G نباشد؟

$$(1) G' \leq H$$

$$(2) H \leq G \text{ طوری است که } G = HZ(G)$$

$$(3) H \leq G \text{ طوری است که } H \leq K \leq G \text{ موجود باشد با این خاصیت که } H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$$

$$(4) H \leq G \text{ طوری است که } |G:H| = p \text{ و } p \text{ کوچکترین عدد اولی است که } |G| \text{ را می‌شمارد.}$$

۹۸- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار و P ایده‌آل اولی از R باشد به طوری که $P \subseteq \langle a \rangle$ و $a \notin P$. در این صورت کدام مورد صحیح است؟

$$(1) P = aP$$

$$(2) aP \subsetneq P$$

$$(3) P_+ \langle a \rangle = R$$

$$(4) P \text{ ایده‌آل ماکسیمال } R \text{ است.}$$

۹۹- فرض کنیم G یک گروه از مرتبه 3^5 باشد، اگر φ یک همریختی نابديهی از G به D_{12} باشد، آنگاه کدام گزینه در مورد G' درست است؟ (منظور از D_{12} ، گروه دو وجهی از مرتبه ۱۲ است.)

$$(1) G' \subseteq \ker \varphi$$

$$(2) \ker \varphi \subseteq G'$$

$$(3) G' \not\subseteq \ker \varphi$$

$$(4) \ker \varphi \not\subseteq G'$$

۱۰۰- تعداد همریختی‌های ممکن از گروه G که $|G| = 75$ به گروه $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ کدام است؟ (منظور از $\mathbb{R}^*$ عناصر غیر صفر $\mathbb{R}$ است.)

$$(1) 1$$

$$(2) 2$$

$$(3) 5$$

$$(4) 75$$

۱۰۱- تعداد چهارتایی های (a, b, c, d) از اعداد طبیعی که $۵ \leq a < b < c < d \leq ۱۵$ برابر است با:

$$\binom{۱۰}{۴} \quad (۱)$$

$$\binom{۱۱}{۳} \quad (۲)$$

$$\binom{۱۰}{۳} \quad (۳)$$

$$\binom{۱۱}{۴} \quad (۴)$$

۱۰۲- ضریب $x^۲y^۳z^۳$ در بسط $(۲x - ۳y - z)^۸$ کدام است؟

$$۸! \quad (۱)$$

$$\frac{۲ \times ۸!}{۳} \quad (۲)$$

$$\frac{۳ \times ۸!}{۲} \quad (۳)$$

$$۳ \times ۸! \quad (۴)$$

۱۰۳- حاصل $\sum_{i=0}^6 (-1)^i \binom{۶}{i} (۶-i)^۶$ کدام است؟

$$۱۲۰ \quad (۱)$$

$$۲۰۰ \quad (۲)$$

$$۵۰۰ \quad (۳)$$

$$۷۲۰ \quad (۴)$$

۱۰۴- اگر G گرافی ۱۱ رأسی باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر می‌تواند دنباله درجات G باشد؟

(۱) ۳ و ... و ۳ و ۳ و ۴ و ۱ (تعداد ۳ها ۹ تا)

(۲) ۳ و ... و ۳ و ۳ (تعداد ۳ها ۱۱ تا)

(۳) ۱۰ و ... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰

(۴) ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ و ۲ و ... و ۲ و ۲ (تعداد ۲ها ۸ تا)

۱۰۵- اگر G گرافی مسطح، دوبخشی و 50 رأسی باشد، در این صورت کدام یک از اعداد زیر کران بالای بهتری برای تعداد یال‌های G است؟

(۱) ۹۶

(۲) ۱۰۳

(۳) ۱۴۴

(۴) ۷۲

۱۰۶- تعداد جواب‌های معادله $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_5 + x_6 + x_7 + x_8) = 55$ در اعداد طبیعی کدام است؟

(۱) $4 \binom{10}{7} + 3$

(۲) $8 \binom{10}{3}$

(۳) $16 \binom{10}{3}^2$

(۴) $\binom{54}{7}$

۱۰۷- به چند طریق می‌توان چهار زیرمجموعه A و B و C و D (نه لزوماً متمایز) را از $\{1, 2, \dots, 10\}$ انتخاب نمود به طوری که $A \cap B \cap C = D$ ؟

(۱) 2^{10}

(۲) 2^{20}

(۳) 2^{30}

(۴) 2^{40}

۱۰۸- اگر T یک درخت 200 رأسی باشد که دارای تطابق کامل است، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) T دارای 200 یال است.

(۲) ماکزیمم درجه T حداقل ۳ است.

(۳) T دارای حداقل ۳ رأس از درجه ۱ است.

(۴) رئوس T را می‌توان به دو مجموعه مستقل که هر یک 100 رأس دارند افراز نمود.

۱۰۹- اگر A ماتریس مجاورت یک گراف ۳-منظم 20 رأسی باشد، در این صورت $\text{tr}(A^2)$ کدام است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۳۰

(۳) ۶۰

(۴) ۱۰۰

۱۱۰- تعداد اعداد ۵ رقمی با ارقام ۱ و ۲ و ۳ که شامل تعداد فردی ۲ هستند، برابر است با:

(۱) ۴۱

(۲) ۱۲۱

(۳) ۴۰

(۴) ۱۲۰

جبر خطی عددی، بهینه سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل:

۱۱۱- می دانیم که $n > 2$ و بردارهای واقع در $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ مستقل خطی اند. مجموعه بردارها در

$$B = \{u_1 + u_2, u_2 + u_3, \dots, u_{n-1} + u_n, u_n + u_1\}$$

مستقل خطی است.

(۱) است.

(۲) است اگر n فرد باشد.(۳) است اگر n زوج باشد.

(۴) نیست.

۱۱۲- دستگاه $Ax = b$ که در آن، $A, m \times n, m < n$ و $b, m \times 1$ و $x, n \times 1$ است.

(۱) جواب یکتا دارد.

(۲) بی نهایت جواب دارد.

(۳) ممکن است جواب نداشته باشد.

(۴) بی نهایت جواب دارد اگر $m = \text{رتبه}(A)$.

۱۱۳- فرض کنید $n > 1$ و a و b اعداد حقیقی هستند و $A_{n \times n} =$ ماتریس A معین مثبت است اگر

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}$$

.....

(۱) $a > b > 0$ (۲) n فرد و $a, b > 0$ (۳) $b < 0 < a$ (۴) n زوج و $0 < a < b$

۱۱۴- ماتریس $H(u) = I - \frac{uu^T}{\beta}$ را در نظر بگیرید که در آن، $u \neq 0$ ، و اسکالر $\beta \neq 0$. اگر به ازای دو بردار a و b

داشته باشیم $H(u)a = b$ ، آن گاه است.

(۱) $\|a\|_2 = \|b\|_2$ (۲) a و b متعامد هستند.(۳) $\|u\|_2 = \|a - b\|_2$ (۴) u و $a - b$ در یک امتداد قرار دارند.

۱۱۵- فرض کنید A یک ماتریس متقارن و $A = USU^T$ که U یک ماتریس متعامد نرمال و S یک ماتریس مثلثی است. در این صورت، S یک ماتریس است.

(۱) قطری

(۲) بالا مثلثی با برخی درایه‌های ناصفر در بالای قطر اصلی

(۳) نانتکین

(۴) پایین مثلثی با برخی درایه‌های ناصفر در زیر قطر اصلی

۱۱۶- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

(۱) به‌ازای اعداد حقیقی a, b و c ، $AB = BA$.

(۲) اعداد حقیقی a, b و c وجود دارند به‌طوری‌که B وارون A باشد.

(۳) به‌ازای اعداد حقیقی a, b و c دو ماتریس A و B متشابه نیستند.

(۴) اعداد حقیقی a, b و c وجود دارند به‌طوری‌که A و B متشابه باشند.

۱۱۷- جواب مسأله کم‌ترین مربعات خطی $\min_x \|Ax - b\|_2$ را می‌توان با حل مسئله $\min_x Qx$ با Qx برابر با به‌دست آورد.

$$(1) x^T A^T A x - x^T A^T b$$

$$(2) x^T A^T A x + x^T A^T b$$

$$(3) x^T A^T A x - 2x^T A^T b$$

$$(4) x^T A^T A x + 2x^T A^T b$$

۱۱۸- گزینه درست در رابطه با مسأله زیر کدام است؟

$$\text{Max } z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(۱) ناحیه شدنی کران‌دار است و نقطه‌ای تبهگن دارد.

(۲) ناحیه شدنی بی‌کران است و نقطه‌ای تبهگن دارد.

(۳) ناحیه شدنی کران‌دار است و جواب‌های بهینه چندگانه دارد.

(۴) ناحیه شدنی بی‌کران است و جواب‌های بهینه چندگانه دارد.

$$\text{Min } z = c^T x$$

۱۱۹- فرض کنید در یک تکرار روش M - بزرگ برای حل مسأله به صورت $Ax = b$ s.t. ستون زیرمتغیر مصنوعی $x \geq 0$

R_1 (یعنی y_j مربوط به R_1) برابر است با $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$. به علاوه، متغیرهای پایه‌ای اول و دوم، مصنوعی و متغیر پایه‌ای

سوم، متغیری با ضریب صفر در تابع هدف است. مقدار $z_j - c_j$ در سطر صفرم جدول برای متغیر R_1 برابر است با

$$(1) -3M$$

$$(2) -2M$$

$$(3) -3M-1$$

$$(4) -2M-1$$

۱۲۰- مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت

$$\text{Min } c^T x$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \geq 2 \quad (P)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و نقطه شدنی $x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. بردار x^0 برای (P) بهینه است اگر و تنها اگر ...

(۱) بردار C یک ضریب نامنفی از بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ باشد.

(۲) بردار $(-C)$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ با ضرایب ترکیب نامنفی باشد.

(۳) بردار $(-C)$ یک ضریب نامنفی از بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ باشد.

(۴) بردار C یک ترکیب خطی از بردارهای $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ با ضرایب ترکیب نامنفی باشد.

۱۲۱- فرض کنید جدول زیر، بخشی از یک جدول مرحله اول (فاز I) در روش دوفازی (دومرحله‌ای) برای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی استاندارد به صورت (P) است. مقدار α برابر است با

$$\text{Min } z = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax = b \quad (P)$$

$$x \geq 0$$

	z	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2
z	۱			۱	α	
x_1	۰			-۱	۴	
R_2	۰			۰	-۱	

$$(2) -2$$

$$(4) 0$$

$$(1) -3$$

$$(3) -1$$

۱۲۲- مسأله (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\text{Min } z = x_1 - x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (P)$$

$$-x_1 - x_2 = a$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و دوگان آن را (D) بنامید. گزینه درست کدام است؟

(۱) به ازای همه مقادیر a ، (P) و (D) هر دو ناشدنی اند.

(۲) به ازای همه مقادیر $a < 0$ ، (P) و (D) هر دو جواب بهینه دارند.

(۳) اگر $a > 0$ ، آن گاه (P) ناشدنی و (D) بی کران است.

(۴) اگر $a = -1$ ، آن گاه (P) بی کران و (D) ناشدنی است.

۱۲۳- اگر $v \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که $A^T v = c$ ، آن گاه به ازای هر x که $Ax \leq 0$ داریم:

$$c^T x \leq 0 \quad (۱)$$

$$c^T x > 0 \quad (۲)$$

$$c^T x = 0 \quad (۳)$$

(۴) $c^T x$ می تواند مثبت، صفر یا منفی باشد.

۱۲۴- مسأله برنامه ریزی خطی (P) به صورت زیر را در نظر بگیرید. مسأله (P') را مسأله ای بگیرید که همانند (P) است

و c به یک بردار $\hat{c}$ تغییر داده شده است. اگر (P) جواب بهینه داشته باشد، آن گاه مسأله (D')، دوگان مسأله

(P')،:

$$\text{Min } z = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \geq b \quad (P)$$

(۱) جواب بهینه دارد.

(۲) می تواند بی کران باشد.

(۳) یا بی کران است یا جواب بهینه دارد.

(۴) می تواند ناشدنی باشد ولی نمی تواند بی کران باشد.

۱۲۵- اگر $x(t, y)$ جواب معادله $\frac{\partial x}{\partial t} = x^2 + x$ با شرط اولیه $x(0, y) = y$ باشد، آنگاه $\frac{\partial x}{\partial y}(t, 1)$ جواب کدام معادله است؟

$$u' = \frac{2+e^t}{2-e^t} u, u(0) = 1 \quad (۱)$$

$$u' = \frac{2-e^t}{2+e^t} u, u(0) = 1 \quad (۲)$$

$$u' = \frac{e^t}{2+e^t} u, u(0) = 1 \quad (۳)$$

$$u' = \frac{e^t}{2-e^t} u, u(0) = 1 \quad (۴)$$

۱۲۶- بازه ماکسیمال هر جواب معادله $x'' + x^3 + x^5 = 0$ ، کدام است؟

(۱) $(0, \infty)$

(۲) $(-1, 1)$

(۳) $(-\infty, 0)$

(۴) $\mathbb{R}$

۱۲۷- کدام جفت تابع می‌توانند جواب‌های یک دستگاه خطی مانند $\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ بر بازه

$(0, 2)$ باشند؟

(۱) $x_1(t) = (1, 1)$, $x_2(t) = (1, t)$

(۲) $x_1(t) = (-1, t)$, $x_2(t) = (t, 1)$

(۳) $x_1(t) = (1, t)$, $x_2(t) = (t, t)$

(۴) $x_1(t) = (1, t)$, $x_2(t) = (t, 1)$

۱۲۸- ماتریس اساسی معادله $\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2e^t - 2e^{2t} & 2e^t - 2e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & 2e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} -2e^t + 2e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 2e^t - 2e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} 2e^t - 2e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & 2e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}$

۱۲۹- به ازای کدام گزینه اگر $x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ یک جواب از دستگاه $x' = Ax$ باشد، آنگاه $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ کدام است؟

(۱) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

(۲) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(۳) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(۴) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

۱۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$ آنگاه برای دستگاه $X' = AX$ ، تعداد جواب‌های مستقل با دوره تناوب اصلی π کدام است؟

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی:

۱۳۱- فرض کنید $Z \sim N(0, 1)$. احتمال اینکه معادله درجه دو $t^2 + 2tZ + 1 = 0$ ریشه حقیقی داشته باشد، کدام است؟ ($\Phi(\cdot)$ نمایانگر تابع توزیع نرمال استاندارد است.)

(۱) $\Phi(1)$ (۲) $1 - \Phi(1)$ (۳) $2\Phi(1) - 1$ (۴) $2(1 - \Phi(1))$

۱۳۲- فرض کنید $X \sim U(-a, a)$ باشد که در آن $a > 1$ و $P(|X| < 1) = P(|X| > \frac{1}{2})$ ، مقدار $\text{Var}(X)$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۳۳- یک جفت تاس سالم را n بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید X تعداد دفعاتی باشد که خال مشاهده شده تاس اول بیشتر از تاس دوم باشد. توزیع X کدام است؟

(۱) $\text{Bin}(n, \frac{1}{36})$ (۲) $\text{Bin}(n, \frac{1}{6})$ (۳) $\text{Bin}(n, \frac{15}{36})$ (۴) $\text{Bin}(n, \frac{5}{6})$

۱۳۴- فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد. اگر $Y = [X]I_{(X>1)}$ ، مقدار $P(Y = 0)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$$

کدام است؟ ($[t]$ نمایانگر جزء صحیح t است.)

(۱) $e-2$

(۲) $\frac{e-1}{2}$

(۳) $\frac{1-e^{-1}}{2}$

(۴) $1-\frac{1}{2}e^{-1}$

۱۳۵- فرض کنید $Z \sim N(0, 1)$ باشد. برای اینکه امید ریاضی مربع فاصله اقلیدسی بین دو نقطه $(a, 1)$ و $(Z, 0)$ در صفحه مختصات کمترین مقدار را داشته باشد، مقدار ثابت a کدام است؟

(۱) -1

(۲) 0

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) 1

۱۳۶- فرض کنید $X \sim N(0, 1)$ و Φ تابع توزیع X باشند. مقدار $E[\ln \Phi(X)]$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) -1

(۳) 1

(۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۷- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی F باشد. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی

$Y = F^2(X)$ در بازه $(0, 1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$

(۲) $\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}$

(۳) $y^{\frac{1}{2}}$

(۴) $y^{-\frac{1}{2}}$

۱۳۸- فرض کنید $X \sim U(-1, 1)$ و $Y = \max(0, X)$. مقدار تابع توزیع تجمعی Y برای $0 < y \leq 1$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{y}{2} \quad (3)$$

$$\frac{y+1}{2} \quad (4)$$

۱۳۹- دو مهره از ظرفی که شامل R مهره قرمز و $N-R$ مهره سفید است به تصادف، یک به یک و بدون جایگذاری

انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A_i پیشامد مشاهده مهره قرمز در انتخاب i ام ($i = 1, 2$) باشد و $X_i = I_{A_i}$

(تابع نشانگر پیشامد A_i). ضریب همبستگی X_1 و X_2 کدام است؟

$$-\frac{1}{N} \quad (1)$$

$$\frac{1}{N} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{N-1} \quad (3)$$

$$\frac{1}{N-1} \quad (4)$$

۱۴۰- فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشد. مقدار $E[e^{\frac{1}{2}X_1X_2}]$ کدام است؟

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

۱۴۱- فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه تصادفی از توزیعی با شرط وجودی تابع مولد گشتاور و $E(X_1^k) = \frac{1}{5} + 5^{k-1}$.

$k = 1, 2, \dots$ باشد. مقدار $P(X_1 + X_2 = 1)$ کدام است؟

$$\frac{6}{25} \quad (1)$$

$$\frac{8}{25} \quad (2)$$

$$\frac{12}{25} \quad (3)$$

$$\frac{18}{25} \quad (4)$$

۱۴۲- فرض کنید $X_1, \dots, X_{10}$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با شرط $P(X_1 = 2) = 1 - P(X_1 = 1) = 1 - p$ باشد. مقدار

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 10\right) \text{ کدام است؟}$$

$$p^{10} \quad (1)$$

$$1 - p^{10} \quad (2)$$

$$(1-p)^{10} \quad (3)$$

$$1 - (1-p)^{10} \quad (4)$$

۱۴۳- فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_6$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال زیر باشند. احتمال

$$f(x) = \frac{x+1}{2}, -1 < x < 1$$

اینکه دقیقاً چهار مشاهده از صفر بزرگتر باشند، کدام است؟

$$\frac{1215}{4096} \quad (1)$$

$$\frac{486}{2048} \quad (2)$$

$$\frac{243}{2048} \quad (3)$$

$$\frac{135}{4096} \quad (4)$$

۱۴۴- فرض کنید $X_1, X_2, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع مشترک پواسن با پارامتر $\lambda = 1$

باشند. قرار دهید $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ که در آن N متغیری تصادفی مستقل از X_i ها باشد به طوری که مقادیر صحیح و نامنفی اختیار می‌کند. مقدار $\text{Var}(S_N)$ کدام است؟

$$\text{Var}(N) + E(N^2) \quad (2)$$

$$\text{Var}(N) + E(N) \quad (1)$$

$$\text{Var}(N) + 2E(N) \quad (4)$$

$$\text{Var}(N) + E^2(N) \quad (3)$$

۱۴۵- در فرایند پواسن همگن $\{N(t) : t \geq 0\}$ با نرخ λ ، برای $0 < s < t$ ، مقدار $E[N(t) | N(s) = K]$ کدام است؟

$$\lambda K + \lambda(t-s) \quad (4) \quad \lambda K + \lambda(t+s) \quad (3) \quad K + \lambda(t-s) \quad (2) \quad K + \lambda(t+s) \quad (1)$$

۱۴۶- در یک فرایند پواسن با پارامتر λ (λ بر حسب ساعت) مشاهدات زیر حاصل شده است. برآورد ناریب پارامتر

λ براساس کل این مشاهدات کدام است؟

در ۱ ساعت اول، ۳ مشتری وارد شد.

در ۲ ساعت دوم، ۴ مشتری وارد شد.

در ۳ ساعت سوم، ۵ مشتری وارد شد.

$$2 \quad (1)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (3)$$

$$5 \quad (4)$$

۱۴۷- فرض کنید $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ و T_1 زمان رخ دادن اولین واقعه باشد، مقدار $E(T_1 | T_1 > 2)$ کدام است؟

$$\frac{7}{2} \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$3 \quad (4)$$

۱۴۸- فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ یک زنجیر مارکوف با فضای وضعیت $\{1, 2\}$ ، ماتریس احتمال انتقال (تغییر وضعیت)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P[X_1 = 1] = P[X_1 = 2] = \frac{1}{2}$$

باشد. مقدار $P[X_3 = 2]$ کدام است؟

$$\frac{25}{36} \quad (1)$$

$$\frac{29}{72} \quad (2)$$

$$\frac{39}{72} \quad (3)$$

$$\frac{43}{72} \quad (4)$$

۱۴۹- فرض کنید $\{X_n\}$ یک زنجیر مارکوف با فضای وضعیت $\{0, 1, 2\}$ و احتمالات تغییر وضعیت $P_{12} = P_{20} = 1$ ،

$$P_{01} = \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad P_{00} = \frac{1}{4}$$

باشد. مقدار μ_{00} (متوسط زمان اولین بازگشت به وضعیت صفر) کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{7}{4} \quad (3)$$

$$\frac{10}{4} \quad (4)$$

۱۵۰- ماتریس احتمال انتقال زنجیر مارکف زیر را با فضای وضعیت $\{0, 1, 2, 3\}$ در نظر بگیرید. توزیع مانای زنجیر کدام است؟

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$(2) \left\{ \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$(3) \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$(4) \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right\}$$

