

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

# آمار و احتمال

رشته ریاضی و فیزیک

راهنمای معلم

پایه یازدهم

دوره دوم متوسطه



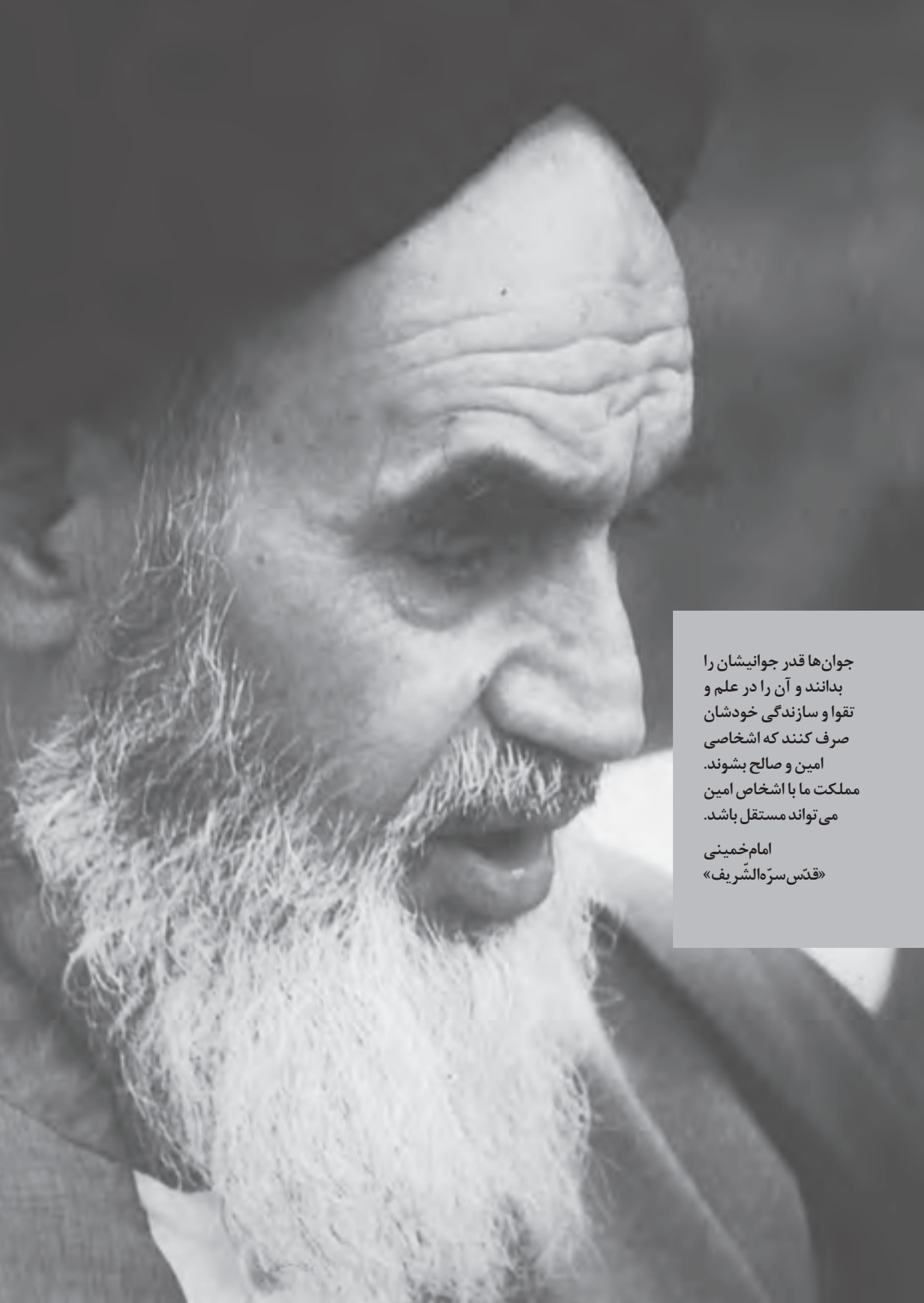
وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

- نام کتاب: راهنمای معلم آمار و احتمال - پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه - ۱۱۱۳۸۲
- پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
- مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
- شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو دادودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
- آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: حمیدرضا امیری، میرشهرام صدر، امید نقشینه‌ارجمند، محمود داورزنی، احسان بهرامی‌سامانی، عادل محمدپور و فریبا جباری (اعضای گروه تألیف)
- شناسه افزوده آماده‌سازی: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
- نشانی سازمان: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - رضوان جهانی فریمانی (صفحه‌آرا) - رعنا فرج‌زاده‌دروئی، فاطمه گیتی‌جبین و حمید ثابت‌کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
- تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
- تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
- وبگاه: [www.irtextbook.ir](http://www.irtextbook.ir) و [www.chap.sch.ir](http://www.chap.sch.ir)
- ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران - کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
- چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
- سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اول ۱۳۹۶

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۰۴۴-۳

ISBN: 978-964-05-3044-3



جوان‌ها قدر جوانیشان را  
بدانند و آن را در علم و  
تقوا و سازندگی خودشان  
صرف کنند که اشخاصی  
امین و صالح بشوند.  
مملکت ما با اشخاص امین  
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی  
«قدس سره الشریف»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز، ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

# فهرست

فصل اول : آشنایی با مبانی ریاضیات..... ۱	فصل دوم : احتمال ..... ۳۹
نگاه کل به فصل ..... ۳	درس اول : مبانی احتمال ..... ۴۰
درس ۱ : آشنایی با منطق ریاضی ..... ۵	نمونه سؤال های ارزشیابی ..... ۴۴
دانش افزایی ..... ۶	درس دوم : احتمال غیر هم شانس ..... ۴۶
دامنه متغیر و مجموعه جواب گزاره نماها ..... ۸	نمونه سؤال ات ارزشیابی (درس دوم) ..... ۴۹
محدودیت های «یا» در زبان طبیعی ..... ۱۰	درس سوم : احتمال شرطی ..... ۵۰
محدودیت های «و» در زبان طبیعی ..... ۱۱	نمونه سؤال های ارزشیابی ..... ۶۰
سوره ها ..... ۱۶	درس چهارم : پیشامدهای مستقل و وابسته ..... ۶۳
نمونه سؤال ات ارزشیابی درس اول ..... ۱۷	روش تدریس ..... ۶۴
درس دوم مجموعه - زیر مجموعه ..... ۱۹	نمونه سؤال ات ارزشیابی (درس چهارم) ..... ۶۸
سؤال تشخیصی و تکمیلی ..... ۲۰	
دانش افزایی ..... ۲۰	فصل سوم : آمار توصیفی ..... ۷۱
تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ..... ۲۱	نگاه کل فصل ..... ۷۳
تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی ..... ۲۳	درس اول : توصیف و نمایش داده ها ..... ۷۵
دو مجموعه مساوی (با زبان ریاضی) ..... ۲۴	درس دوم : معیارهای گرایش به مرکز ..... ۷۷
نمونه سؤال ات ارزشیابی درس دوم ..... ۲۵	درس سوم : معیارهای پراکنندگی ..... ۷۹
درس سوم : جبر مجموعه ها ..... ۲۶	تمرین ..... ۹۱
اهداف درس سوم ..... ۲۷	
روش تدریس ..... ۲۷	فصل چهارم : آمار استنباطی ..... ۹۵
اشتباهات رایج دانش آموزان ..... ۳۳	اهداف فصل استنباط آماری ..... ۹۷
نمونه سؤال های ارزشیابی درس سوم ..... ۳۶	درس اول : گردآوری داده ها ..... ۹۹
	نمونه سؤال های ارزشیابی ..... ۱۰۸

# سخنی با معلم

کتاب آمار و احتمال پایه یازدهم رشته ریاضی در جهت اهداف برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های درسی دوره اول متوسطه تألیف شده است. زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام دادن محاسبات بود. در رویکرد جدید، ضمن توجه به این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوه تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. در واقع رویکرد «آموزش برای حل مسئله» به «آموزش از طریق حل مسئله» تغییر کرده است. رسیدن به چنین هدفی، مشکلات و دشواری‌های فراوانی دارد و به سرعت امکان‌پذیر نیست ولی مدّ نظر قراردادن آن می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعه آموزش ریاضی را تعیین کند. در این میان، اصلی‌ترین و مؤثرترین وظیفه بر عهده معلم قرار دارد. قدرت انعطاف و هماهنگی و همراهی معلمان با برنامه‌های جدید ستودنی است. بر این اساس، مؤلفان کتاب‌های حاضر سعی کرده‌اند برای انجام وظیفه خویش در مورد آموزش معلمان، ضمن اطلاع‌رسانی مناسب و به‌هنگام درباره تألیف، کتاب راهنمای معلم و نیز فیلم‌های آموزشی مربوط را به‌موقع در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختار کتاب حاضر از سه بخش اصلی «فعالیت»، «کار در کلاس» و «تمرین» و نیز مثال‌های حل شده و توضیحات به‌صورت متنی، نکات مهم و تعاریف، تشکیل شده است. آنچه در هر «فعالیت» به‌طور عمده مدّ نظر بوده آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درس و سهیم بودن آنان در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحل مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح راه‌حل، مرتب کردن، قضاوت در مورد یک راه‌حل و مقایسه راه‌حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها ساده و آسان نیست و صداقت، اجرای مناسب آن ارزش زیادی دارد. فعالیت‌ها در حدّ متوسط طراحی شده‌اند؛ بنابراین معلم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزان خود، یک فعالیت را غنی‌تر کند یا با ارائه توضیحات بیشتر و ایجاد تغییراتی، آن را ساده‌تر نماید و حتی فعالیتی مکمل در جهت آموزش همان مفهوم درسی طراحی کند.

مؤلفان در این کتاب بر این باورند که استفاده از مثال‌ها و مسائل کاربردی که رابطه‌ای با شاخه‌های مختلف رشته ریاضی داشته باشد می‌تواند علاوه بر ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان برای یادگیری آمار و احتمال به پرورش تفکر ریاضی در آنها کمک کرده‌طور که در مواجهه با مسائل و مشکلات روزمره از این ذهنیت استفاده لازم را برده و در آینده افرادی خلاق، متفکر و با قدرت تجزیه و تحلیل و دلسوز برای خدمت به جامعه و ایران اسلامی تربیت شوند.

هنگام انجام دادن فعالیت‌ها، هدایت گفت‌وگوی کلاسی با گفت‌وگو با دانش‌آموزان به ارائه دیدگاه‌ها و دفاع از اندیشه‌های خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازد، به عهده معلم است. به‌طور خلاصه، فراهم کردن موقعیت‌های یادگیری و فرصت دادن به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دل‌مشغولی‌های همکاران عزیزمان باشد. «کار در کلاس» با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی، تعمیم یادگیری طراحی شده و انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در انجام آن داشته باشند. مثال‌ها توسط همکاران محترم در کلاس بررسی شده و سعی می‌شود تا همانند کار در کلاس‌ها دانش‌آموزان به حل و بررسی آنها مشغول باشند و روی نکات مهم و تعاریف که عمدتاً در داخل کادری قرار دارند از طرف دبیران محترم تأکید لازم انجام خواهد پذیرفت. حل «تمرین»‌ها به عهده دانش‌آموزان است؛ اما ضرورت دارد که معلم زمینه را برای طرح پاسخ‌ها و بررسی آنها در کلاس فراهم سازد.

گروه تألیف، آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دارد. به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه داده شده قابل دریافت است. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال و تکیه بر تلاش، اراده و همت شما دبیران محترم می‌توانیم به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار باشیم.

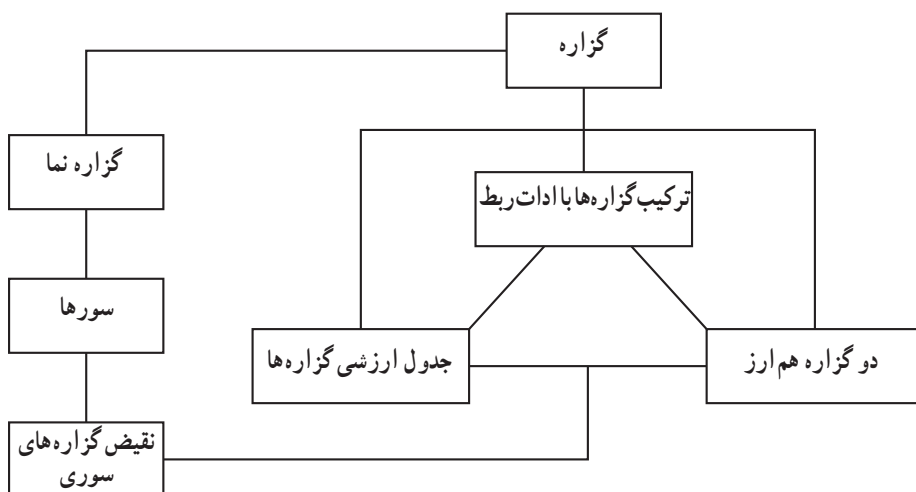
مؤلفان

# فصل اول

## آشنایی با مبانی ریاضیات

# درس اول: آشنایی با منطق ریاضیات

## نمودار مفهومی درس





## نگاه کلی به فصل

درس اول: مفهوم گزاره و ارزش یک گزاره بیان می‌شود. سپس به کمک جدول ارزش گزاره‌های، گزاره‌های هم‌ارز معرفی می‌شوند. در ادامه گزاره‌نما، دامنه متغیر گزاره‌نما و مجموعه جواب گزاره‌نما را ملاحظه خواهید کرد.

ترکیب فصلی، عطفی، شرطی، دو شرطی، نقیض یک گزاره و جدول ارزش مربوط به هر کدام از آنها آمده است. مطلب پایانی درس اول معرفی سوره‌های عمومی و وجودی و نقیض هر یک از آنها است. درس دوم: در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه، دانش‌آموزان آشنا شده‌اند، در ابتدا به یادآوری تعلق و عضویت پرداخته‌ایم، سپس با انجام یک فعالیت تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه را محاسبه می‌کنند و مفهوم افراز مجموعه بیان شده است.

در ادامه با استفاده از نمادهای منطقی و زبان منطق ریاضی، مفهوم زیرمجموعه آمده است و به روش عضوگیری دلخواه حکم‌هایی دربارهٔ زیرمجموعه‌ها ثابت شده است. مطلب پایانی این درس معرفی دو مجموعه مساوی با استفاده از زبان منطق ریاضی است.

## درس اول

### اهداف کلی

- \* منطق دستور زبان ریاضی است.
- \* منطق می‌تواند اعتبار استدلال را مشخص کند.
- \* از این به بعد از مطالب منطق در استدلال‌ها استفاده می‌کنیم.
- \* در بیان گزاره‌های سوری یا زبان طبیعی به صورت درست از سورها استفاده می‌نماییم.

### اهداف جزئی

- \* دانش‌آموزان قادر به شناسایی گزاره‌ها باشند.
- \* مفهوم ارزش گزاره را درک کنند.
- \* جدول ارزش گزاره‌های مرکب را تشکیل دهند.

\* سورها را بشناسند و صدق و کذب گزاره‌های سوری را تشخیص دهند.

\* اهداف عملکردی (از جنس شایستگی)

\* با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، گزاره‌های هم‌ارز را شناسایی کند.

\* با استفاده از ارزش گزاره‌ها و ادات ربط بتواند ارزش یک گزاره مرکب را تعیین کند.

\* با توجه به ارزش گزاره‌های مرکب، بتواند راجع با ارزش گزاره‌های ساده بحث کند.

پیش‌دانسته‌های مورد نیاز

\* دانش‌آموز بتواند از زبان طبیعی برای استدلال کردن به صورت مختصر و مفید استفاده

کند.

برای مثال وقتی از کسی می‌پرسید، چرا گوشت شکار را نمی‌خوری؟ او در پاسخ می‌تواند

بگوید که خوردن گوشت شکار مناسب نیست. اما این استدلال خوب و قابل قبولی محسوب

نمی‌شود.

اگر در پاسخ، استدلال زیر را مطرح کند؛ این استدلال به زبان طبیعی قابل قبول است :

خوردن گوشت شکار باعث از بین رفتن و کشتن حیوانات می‌شود و کشتن حیوانات کار

درستی نیست، بنابراین من گوشت شکار را نمی‌خورم.

از دانش‌آموزان بخواهید برای توجیه کارهای خودشان استدلال بیاورند یا در یک بحث ساده

و روزمره شرکت کنند و برای درستی گفته‌هایشان استدلال بیاورند.

\* مفاهیم و موضوعات ریاضی و هندسه مربوط به سال‌های قبل را بدانند، زیرا صدق یا کذب

گزاره‌ها به آن مطالب مربوط می‌شوند.

## درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی

پیشنهادی برای شروع بحث گزاره

استدلال‌های ساده زیر را در نظر بگیرید :

- الف) در زمستان هوا سرد می‌شود.  
در هوای سرد نیاز به پوشش گرم پیدا می‌کنیم.  
نتیجه : در زمستان نیاز به پوشش گرم داریم.  
نتیجه : سقراط فانی است.
- ب) سقراط انسان است.  
انسان فانی است.

در استدلال‌های بالا دو جمله نخست را مقدمه استدلال و جمله سوم نتیجه استدلال است و این استدلال از چند جمله خبری تشکیل شده‌اند.

گزاره : به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده دارای ارزش راست (درست) یا دروغ (نادرست) باشد گزاره می‌گوییم.

توجه : عبارت « $۵ = ۳ + ۲$ » یک گزاره است، این گزاره جمله‌ای خبری است که دارای محتواهای زیر است :

\* عدد ۵ برابر با مجموع دو عدد ۳ و ۲ است.

\* ۵ دو واحد بیشتر از ۳ است.

\* ۵ سه واحد بیشتر از عدد ۲ است.

در حقیقت محتوا جمله خبری  $۵ = ۳ + ۲$  را گزاره می‌گوییم و این محتوا ممکن است با جمله‌های خبری متفاوت بیان شود.

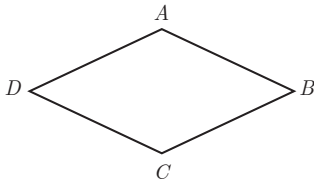
مثال : گزاره‌های «برف سفید است»، «الثلج الابيض» و «the snow is white» دارای محتوا یکسان هستند.

مثال : از بین جمله‌های زیر گزاره‌ها را مشخص و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

الف)  $۲ < ۳$

ب) عدد ۲۸۵۳ اول است.

ج) عینک مرا تعمیر کنید.



(د) در لوزی مفروض دو قطر بر هم عمودند.

(ه) لطفاً پارک نکنید.

(و)  $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$

(ز) عدد  $5^9 + 8$  عددی اول نیست.

حل : الف) گزاره است و ارزش آن درست است. جز این گزاره چنین است :

«عدد ۲ از ۳ کوچک تر است»

(ب) توجه داشته باشید که بعضی مواقع لازم است، دانش آموز برای بی بردن به ارزش گزاره کمی وقت بگذارد و تحقیق کند، یعنی این طور تصور نشود که ارزش هر گزاره باید خیلی سریع نمایان باشد. در این مثال مجموع ارقام ۱۸ است، پس این عدد به ۳ بخش پذیر است و اول نیست پس ارزش گزاره نادرست است.

(ج) جمله امری است و گزاره نیست.

(د) گزاره است و درست است. در سال قبل در درس هندسه درستی این گزاره اثبات شده

است.

(و) گزاره است و ارزش آن درست است.

(ز) گزاره است و ارزش آن نادرست است؛ زیرا :

$$\begin{aligned} 5^9 + 8 &= (5^3)^3 + 2^3 = (5^3 + 2) ((5^3)^2 - 5^3 \times 2 + 2^2) \\ &= (5^3 + 2) (5^6 - 2 \times 5^3 + 4) \end{aligned}$$

### دانش افزایی

منطق ریاضی به بررسی دقیق استدلال ها می پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می کند.

به مثال های زیر دقت کنید :

(ب) هر تهرانی، اصفهانی است.

الف) هر تهرانی، ایرانی است.

هر اصفهانی، ایرانی است.

هر ایرانی، آسیایی است.

نتیجه : هر تهرانی، ایرانی است.

نتیجه : هر تهرانی آسیایی است.

استدلال (الف) یک استدلال sound است. زیرا مقدمات و نتیجه آن صادق اند و از قواعد

منطق پیروی می کنند.

استدلال (ب) یک استدلال معتبر یا valid است. این نوع استدلال صوری است و از قواعد منطق پیروی می‌کند اما مقدمه اول آن دارای اعتبار معنایی نیست و نادرست است.

به استدلال‌های زیر توجه کنید:

(الف) تهران پایتخت ایران است. (ب) همه سگ‌ها سگ هستند.

نتیجه: همه سگ‌ها سگ هستند. نتیجه: همه سگ‌ها سگ هستند.

این دو استدلال دارای مقدمه و نتیجه صادق هستند، پس استدلال sound است. اما این استدلال‌ها مفید یا usfull نیستند، زیرا چیزی به معرفت ما اضافه نمی‌کنند و جالب یا تشویق‌آمیز نیست. یعنی به گونه‌ای نیست که شخصی از قبل تردیدی داشته است و با این استدلال تردیدش برطرف شود.

### گزاره‌نما

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:

(الف) او یک بازیکن فوتبال است. (ضمیر او، متغیر است)

(ب)  $a$  عددی اول است. ( $a$ ، متغیر است)

(ج) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد  $A$  رخ دهد، برابر  $\frac{1}{6}$  است. (مجموعه  $A$  متغیر است)

(د) مجموع سه برابر عددی و دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. ( $3x + 2y = 6$ ;  $x$  و  $y$  متغیر

هستند)

(ه) اینجانب ..... فرزند ..... دانش‌آموز کلاس ..... متقاضی استفاده از

امکانات کتابخانه مدرسه هستم. (جاهای خالی متغیرها هستند)

ارزش جمله‌های خبری بالا را نمی‌توان تعیین کرد، مگر آنکه به جای متغیرهای آنها اسم

خاص بنشینند و گزاره‌ای با ارزش درست یا نادرست به دست آید.

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیرها

به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در

آنها یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

توجه: جلوتر راجع به سورها بحث خواهیم کرد، وقتی سورها بر سر گزاره‌نماها قرار

می‌گیرند، گزاره‌نماها را به گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست تبدیل می‌کنند. هر گزاره‌نما شامل متغیر  $x$  را می‌توان با افزودن اصطلاحی مانند «به ازای هر  $x \in A$ » یا «وجود دارد  $x \in A$ » تبدیل به یک گزاره کرد.

مثال : عبارت‌های زیر گزاره هستند.

الف) برای هر عدد حقیقی  $x$ ، داریم  $x^2 \geq 0$ .

ب) وجود دارد  $x \in \mathbb{R}$  به طوری که  $x > 3$ .

## دامنه متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نماها

در این کتاب هدف این نیست که دانش‌آموزان دامنه متغیر گزاره‌نماها را تعیین کنند، در مثال‌های کتاب معمولاً دامنه متغیر داده شده است ولی از دانش‌آموزان خواسته شده تا مجموعه جواب گزاره‌نماها را محاسبه کنند.

توجه : عبارتی نظیر  $x^2 + 1 \neq 0$  یعنی به صورت کلی «مربع هر عدد حقیقی به اضافه مخالف صفر است» را گزاره کلی می‌گوییم. در این گزاره کلی سور عمومی مستتر است و منظور از این گزاره کلی چنین است :

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0$$

ارزش گزاره کلی  $x^2 + 1 \neq 0$  درست است.

## ترکیب گزاره‌ها

### فعالیت صفحه ۶

در این فعالیت دانش‌آموزان با ادات ربط در جمله‌های خبری مرکب آشنا می‌شوند. برای اینکه ارزش گزاره‌های مرکب را تعیین کنیم در ادامه ادات ربط و جدول ارزش گزاره‌های مرکب را آورده‌ایم.

### نقیض یک گزاره

نقیض گزاره  $p$  را به صورت  $\sim p$  نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که  $p$ » می‌خوانیم. اگر

ارزش گزاره  $p$  راست باشد در این صورت ارزش گزاره  $p \sim$  دروغ است و اگر ارزش  $p$  دروغ باشد آن‌گاه ارزش گزاره  $p \sim$  راست است.

توجه داشته باشید که در منطق ریاضی  $p$  و  $p \sim$  هر دو نمی‌توانند راست یا هر دو دروغ باشند. مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف)  $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$  (الف) ۲ عددی زوج یا عدد  $\pi$  گویاست.

ج) برای هر عدد صحیح  $a$ ، اگر  $a$  زوج باشد آن‌گاه  $a + 1$  فرد است.

حل - الف)  $\{a, b\} \not\subseteq \{a, b, c\}$

ب) چنین نیست که (۲ عددی زوج یا عدد  $\pi$  گویاست).

توجه داشته باشید که عبارت «چنین نیست که» برای کل گزاره مرکب است و به اشتباه نوشته نشود که:

چنین نیست که ۲ عددی زوج یا عدد  $\pi$  گویاست.

توجه: هدف ما از این‌گونه مثال آن است که دانش‌آموز نقیض این گزاره مرکب را به صورت

درست بالا بنویسد و هدف ما این نیست که از هم‌ارزی  $(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$  استفاده شود.

د) چنین نیست که (برای هر  $a \in \mathbb{Z}$  اگر  $a$  زوج باشد آن‌گاه  $a + 1$  فرد است).

چون در زبان طبیعی برای نقض کردن هر جمله خبری کافی است فعل آن را منفی کنیم بنابراین

برخلاف منطق ریاضی این امکان به وجود می‌آید که یک گزاره و نقیض آن هم ارزش باشند، مانند:

$p$ : بعضی از انسان‌ها سفیدپوست هستند.

$q$ : بعضی از انسان‌ها سفیدپوست نیستند.

در منطق ریاضی گزاره  $q$ ، نقیض گزاره  $p$  نیست و جلوتر در قسمت نقیض گزاره‌های سوری،

این مطلب را ملاحظه خواهید کرد. اما در زبان طبیعی  $p$  و  $q$  را نقیض یکدیگر می‌گیریم و این اشکال

به وجود می‌آید.

## ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p$  یا  $q$ » را که به صورت  $p \vee q$  می‌نویسند، ترکیب

فصلی دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی « $\vee$ » فاصل گفته می‌شود.

## دانش افزایی : انواع فاصل (یا)

الف) «یا» مانعة الجمع

وقتی دو گزاره را با این رابط منطقی ترکیب می‌کنیم، نمی‌توانند هر دو گزاره توأم با هم برقرار باشند ولی ممکن است نه این و نه آن باشد. برای مثال، بچه‌ای از دور به درختی اشاره می‌کند، می‌گوید :

«آن درخت آلبالو یا انار است»

در اینجا جمع هر دو محال است ولی ممکن است هیچ کدام نباشد و مثلاً درخت هلو باشد.

ب) «یا» مانعة الخلو (یا) منطقی ریاضی)

وقتی دو گزاره را با این رابط منطقی ترکیب می‌کنیم، در اینجا خالی بودن اشکال دارد، یعنی نمی‌شود نه این باشد و نه آن. بنابراین به‌طور حتم یکی از گزاره‌ها برقرار است و ممکن است هر دو با هم برقرار باشند. برای مثال؛ رابط «یا» در گزاره مرکب «جزای عمل در دنیا یا در آخرت است.» یای مانعة الخلو است.

توجه : یای به‌کار رفته در ریاضی یای مانعة الخلو است.

مثال : رابط «یا» در گزاره مرکب «۲ عددی اول یا ۳ عددی فرد است» یای مانعة الخلو است.

ج) «یا» حقیقیه

وقتی دو گزاره را با این رابط منطقی ترکیب می‌کنیم، حتماً یکی از گزاره‌ها برقرار و گزاره دیگر برقرار نیست در این حالت جمع دو گزاره با هم و خلو آن نیز مشکل دارد. یعنی نمی‌تواند نه این باشد و نه آن. برای مثال یای به‌کار رفته در گزاره‌های مرکب زیر یای حقیقیه است.

الف) علی در خانه است یا علی در خانه نیست.

ب) هر عدد طبیعی زوج است یا هر عدد طبیعی فرد است.

## محدودیت‌های «یا» در زبان طبیعی

I- در زبان طبیعی گاهی «یا» در بین کلمات داریم ولی در بین جملات نداریم :

مثال : ارزش گزاره «هر عدد صحیح زوج یا فرد است» درست می‌باشد و این درحالی است



که ارزش گزاره هر عدد صحیح زوج است یا هر عدد صحیح فرد است، نادرست است.  
 II- می‌دانیم که هرگاه  $p \equiv T$  و  $q \equiv r \equiv f$  در این صورت گزاره‌های  $p \vee r \equiv T$  و  $p \vee q \equiv T$  در منطق می‌توان جای  $q$  و  $r$  را باهم عوض کرد اما در زبان طبیعی باید بین جملات  $p$  و  $q$  یا  $p$  و  $r$  ارتباط معنایی رعایت شود ولی در منطق این طور نیست.

مثال: رقابت تسلیحاتی ابر قدرت‌ها تمام می‌شود یا جنگ جهانی سوم رخ می‌دهد.

$$2 + 2 = 7 \text{ یا جنگ جهانی سوم رخ می‌دهد.}$$

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم و به رابط منطقی « $\wedge$ » عاطف گفته می‌شود.

## محدودیت‌های «و» در زبان طبیعی

I- در منطق ریاضی تقدم و تأخر زمان نداریم ولی در زمان طبیعی داریم. در منطق  $p \wedge q$  یا  $q \wedge p$  تفاوتی ندارد، اما در زبان طبیعی گاهی باهم متفاوت است.

مثال: سعید مرد و آن را در قبرستان دفن کردند.

حال اگر بگوییم سعید را در قبرستان دفن کردند و مرد در اینجا قتل یا جنایت اتفاق افتاده است و معنی جمله عوض می‌شود.

II- مثال. علی و مریم ازدواج کرده‌اند.

در منطق: علی ازدواج کرد و مریم ازدواج کرد.

در زبان طبیعی: این طور استنباط می‌شود که علی و مریم باهم ازدواج کرده‌اند.

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب  $p \Rightarrow q$  را ترکیب شرطی آنها می‌گوییم و آن را چنین

می‌خوانیم:

«اگر  $p$  آن‌گاه  $q$ ». در این ترکیب شرطی  $p$  را مقدم و  $q$  را تالی می‌نامیم.

برای توجیه جدول ارزش گزاره شرطی، می‌توان به مثال‌های زیر کمک گرفت.

۱ اگر ۵ عددی فرد باشد آن‌گاه ۵<sup>۲</sup> فرد است.

در این مثال فرض درست است، بنابراین از فرض درست توقع داریم که حکم نیز درست باشد که در اینجا چنین است، پس ارزش گزاره شرطی درست است. یعنی از گزاره‌ای درست می‌توان گزاره‌ای درست را نتیجه گرفت، یعنی:  $(p \Rightarrow q) \equiv T : (p \equiv T) \wedge (q \equiv T)$

**نتیجه:** در گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  اگر  $p$  درست و  $q$  درست باشد آن‌گاه ارزش گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » درست است.

۲ اگر  $۱=۱$  - آن‌گاه  $۱=۱$ .

در این مثال فرض  $۱=۱$  نادرست است اما می‌توان دو طرف این تساوی را به توان برسانیم و نتیجه درست  $۱=۱$  را بگیریم. یعنی:  $p \equiv F, q \equiv T : (p \Rightarrow q) \equiv T$

بنابراین از گزاره نادرست می‌توان یک گزاره درست را نتیجه گرفت، یعنی در این حالت ارزش گزاره شرطی درست است.

**نتیجه:** در گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  اگر  $p$  نادرست و  $q$  درست باشد آن‌گاه ارزش گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » درست است.

۳ اگر  $۱=۲$  آن‌گاه  $۶=۷$ .

در این مثال فرض  $۱=۲$  نادرست است اما می‌توان دو طرف این تساوی را با ۵ جمع کرد و در نتیجه  $۶=۷$  را نتیجه بگیریم.

بنابراین از یک گروه نادرست می‌توان یک گروه نادرست را نتیجه گرفت. یعنی در این حالت ارزش گزاره شرطی درست است.

**نتیجه:** در گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  اگر  $p$  نادرست و  $q$  هم نادرست باشد آن‌گاه ارزش گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » درست است.

اما باید توجه داشته باشیم که از یک گزاره درست نمی‌توان گزاره‌ای نادرست را نتیجه گرفت. بنابراین اگر در گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$ ،  $p$  درست و  $q$  نادرست باشد آن‌گاه ارزش گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » نادرست است.

### ترکیب دو شرطی گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی  $p$  و  $q$  می‌نامیم. گزاره مرکب  $p \Leftrightarrow q$  را به صورت زیر می‌خوانیم:

«اگر  $p$  آن گاه  $q$  و برعکس»، « $p$  شرط لازم و کافی برای  $q$  است»، « $p$  اگر و تنها اگر  $q$ » و « $p$  اگر و فقط اگر  $q$ ».

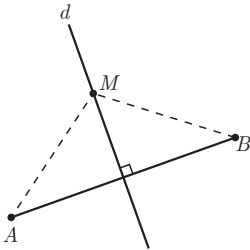
مثال: گزاره‌های مرکب زیر، نمونه‌ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

(الف)  $6$  عدد اول است  $\Leftrightarrow 2 > 5$

(ب)  $99$  عدد اول نیست  $\Leftrightarrow \sqrt{2}$  عددی گویا است.

(پ) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد آن است که پیشامد تهی باشد.

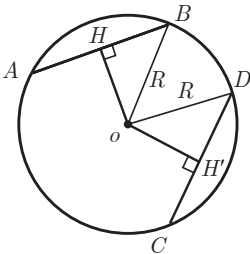
(ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمودمنصف یک پاره خط باشد، آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره خط برابر باشند.



$d$  عمودمنصف  $AB$  :  $(M \in d \Leftrightarrow MA=MB)$

مثال: در هر دایره، از دو وتر آنکه از مرکز دورتر است کوچکتر است و برعکس

حل: با توجه به شکل ثابت می‌کنیم که:



$(P : AB < CD) \Leftrightarrow (q : OH > OH')$

در اثبات این گزاره دو شرطی می‌توان  $p$  را فرض کرد و به حکم  $q$  رسید و برعکس. یعنی

می‌توان از  $p$  به  $q$  و  $q$  به  $p$  رسید.

$$\begin{aligned}
 AB < CD &\Leftrightarrow \frac{AB}{2} < \frac{CD}{2} \Leftrightarrow HB < DH' \Leftrightarrow HB^{\vee} < DH'^{\vee} \\
 &\Leftrightarrow R^{\vee} - OH^{\vee} < R^{\vee} - OH'^{\vee} \\
 &\Leftrightarrow -OH^{\vee} < -OH'^{\vee} \\
 &\Leftrightarrow OH^{\vee} > OH'^{\vee} \Leftrightarrow OH > OH'
 \end{aligned}$$

گزاره‌های همیشه درست

گزاره  $P \Rightarrow P$  را در نظر بگیرید و جدول ارزشی این گزاره را تشکیل دهید.

$P$	$P \Rightarrow P$
$T$	$(د \Rightarrow د) \equiv T$
$F$	$(ن \Rightarrow ن) \equiv T$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ارزش گزاره مرکب  $P \Rightarrow P$  در جدول بالا همیشه درست است بنابراین به چنین گزاره مرکبی، گزاره همیشه درست می‌گوییم.

مثال: نشان دهید که گزاره مرکب  $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$  همیشه درست است.

حل. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان می‌دهیم که در هر سطر جدول ارزش این گزاره راست است.

$P$	$q$	$P \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

## دو گزاره هم‌ارز

هر گاه دو گزاره  $p$  و  $q$  هم‌ارزش باشند، می‌نویسیم  $p \equiv q$  و می‌خوانیم « $p$  با  $q$  هم‌ارز است». چنانچه  $P$  و  $Q$  دو گزاره مرکب باشند، به طوری که در جدول ارزش گزاره‌ها، همواره در هر سطر جدول ارزش یکسانی داشته باشند، در این صورت می‌نویسیم  $P \equiv Q$ .

مثال. آیا دو گزاره  $(p \Rightarrow q)$  و  $[(p \wedge q) \vee \sim p]$  هم‌ارز هستند.

توصیه مهم: در استدلال هم‌ارزی گزاره‌ها فقط از دانش‌آموزان می‌خواهیم که به کمک جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی‌ها را بررسی کنند و راه‌حل‌هایی مانند زیر به هیچ عنوان در برنامه تدریس کتاب نیست.

$$\begin{aligned} \text{توزیع پذیری} \quad (p \wedge q) \vee \sim p &\equiv (p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p) \\ &\equiv T \wedge (q \vee \sim p) \equiv q \vee \sim p \\ &\equiv \sim p \vee q \quad \text{جاب‌جایی} \\ &\equiv p \Rightarrow q \end{aligned}$$

توصیه مؤلفین بر این است که از راه‌حل‌هایی مانند بالا در سر کلاس استفاده نکنید و فقط به کمک جدول ارزش‌ها به صورت زیر، هم‌ارزی گزاره‌های مرکب را بررسی نمایید.

$P$	$q$	$P \wedge P$	$\sim p$	$(p \wedge q) \vee \sim p$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د

در هر سطر جدول ارزش  $(p \Rightarrow q)$  و  $[(p \wedge q) \vee \sim p]$  با هم یکسان است، پس:

$$[(p \wedge q) \vee \sim p] \equiv (p \Rightarrow q)$$

در کتاب درسی بررسی شده است که  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ . می‌توان از این هم‌ارزی برای اثبات قضیه‌های شرطی به صورت زیر استفاده کرد.

مثال. ثابت کنید هرگاه  $n$  عددی صحیح و  $n^2$  مضرب ۵ باشد، آن گاه  $n$  نیز مضرب ۵ است.  
حل. ابتدا صورت مثال بالا را به زبان منطق ریاضی می نویسیم.

$$n \in \mathbb{Z}, n^2 = 5k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n = 5k' (k' \in \mathbb{Z})$$

برای اثبات این قضیه شرطی با استفاده از عکس نقیض ترکیب شرطی، ثابت می کنیم که:

$$n \in \mathbb{Z}', n \neq 5k' (k' \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n^2 \neq 5k (k \in \mathbb{Z}')$$

چون  $n$  عدد صحیحی است که مضرب ۵ نیست، بنابراین عدد  $n$  به یکی از صورت‌های زیر است:

$$n = 5k + 1 \quad ; \quad n = 5k + 2 \quad ; \quad n = 5k + 3 \quad ; \quad n = 5k + 4$$

اکنون اگر  $n^2$  را محاسبه می کنیم ملاحظه خواهیم کرد که در هر حالت  $n^2 \neq 5k$ . بنابراین

حکم برقرار است.

## سورها

مجموعه اعداد حقیقی  $\mathbb{R}$  را در نظر بگیرید، می خواهیم این خاصیت اعداد حقیقی را بیان کنیم که صفر عضو خنثی است، یعنی برای هر عدد حقیقی مانند  $x$ ، همواره داریم  $x + 0 = x$  برای نوشتن این جمله به زبان ریاضی، لازم است که عبارت «برای هر» را با نمادی مشخص کنیم. قرارداد ریاضی دان‌ها بر این است که آن را با نماد « $\forall$ » مشخص می کنند و به آن سور عمومی می گویند. بنابراین چنین می نویسیم:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$$

همچنین برای بیان این خاصیت که «وجود دارد عدد حقیقی که مکعب آن برابر با ۲ است» لازم است که عبارت «وجود دارد» را با نمادی مشخص کنیم. قرارداد ریاضی دان‌ها بر این است که آن را با نماد « $\exists$ » مشخص می کنند و به آن سور وجودی می گویند. بنابراین چنین می نویسیم:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^3 = 2$$

وقتی برای گزاره نمای  $p(x)$  از سور عمومی استفاده می کنیم، یعنی  $\forall x \in A : p(x)$  در این صورت گزاره نما تبدیل به گزاره می شود. این گزاره سوری درست است هرگاه مجموعه  $A$  برابر با مجموعه جواب گزاره نما باشد، یعنی هر عضو از این دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند. در نتیجه هیچ مثال نقضی در مجموعه  $A$  برای  $p(x)$  وجود ندارد.

مثال. ارزش گزاره الف، راست و ارزش گزاره ب دروغ است.

$$\text{الف) } (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0) \equiv T$$

$$\text{ب) } (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0) \equiv F$$

وقتی از سور وجودی برای گزاره‌نمای  $p(x)$  استفاده می‌کنیم، یعنی  $\exists x \in A : p(x)$  در این صورت این گزاره درست است هرگاه مجموعه جواب گزاره‌نما نتهی و زیرمجموعه  $A$  باشد. یعنی گزاره نما  $p(x)$  به ازای حداقل یک عضو مجموعه  $A$  درست باشد و در این حالت مجموعه جواب گزاره‌نما نتهی است.

مثال.

$$\text{الف) } (\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0) \equiv T \quad ; \quad \text{ب) } (\exists x \in P : x = 2k, k \in \mathbb{Z}) \equiv T$$

$$\text{ج) } (\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2 = 0) \equiv F \quad ; \quad \text{د) } (\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0) \equiv F$$

مثال. ارزش گزاره سوری  $(2^{2^n} + 1) \in P$ ؛  $\forall n \in \mathbb{N}$  را بررسی کنید.

حل. فرما تصور می‌کرد که  $F_n = 2^{2^n} + 1$  برای عددهای صحیح و غیر حقیقی  $n$ ، عددی اول است.

او در این ادعا دچار اشتباه شده بود. زیرا فرما از استقرای ناقص استفاده کرده بود و برای

$n = 0, 1, 2, 3, 4$  به نتیجه رسیده بود. اما سال‌ها بعد ریاضی‌دانی به نام اولد نادرستی این حکم را

برای  $n = 5$  نشان داد.

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

$$= 641 \times 6700417$$

بنابراین با آوردن مثال نقض توسط اولر، حکم کلی فرما رد شد.

توجه: قبلاً گفتیم، دانش‌آموزان برای اینکه ارزش یک گزاره را مشخص کنند، بعضی

اوقات نیاز به پژوهش و صرف وقت دارند و این نمونه‌ای از این گزاره‌ها است.

## نمونه سؤالات ارزشیابی درس اول

۱) از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

$$\text{الف) } 3 < 2 -$$

$$\frac{1}{\sqrt{0}} = 0 / 142857$$

ب) پنجاهمین رقم بعد از ممیز عدد  $\frac{1}{\sqrt{0}}$  برابر ۵ است.

ج) ای کاش می توانستم در هوای پاک زندگی کنم.

د) فردا هوا به صورت بارانی پیش بینی شده است.

۲ دامنه متغیر گزاره‌نمای  $\sqrt[3]{2x-1} = 3$  برابر با  $[\frac{1}{4}, +\infty)$  است، مجموعه جواب آن را

به دست آورید.

۳ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) ۴ عددی گویا است یا  $-3 \geq -5$ .

ب) در یک آزمایش تصادفی  $p(s) = 1$  یا  $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ .

ج) ۵ واسطه حسابی بین دو عدد ۱۲۵ و  $\frac{1}{5}$  است یا ۰ عددی مثبت است.

د) اگر ۵ مربع کامل باشد آن گاه فردا باران می بارد.

ه) چهارضلعی مستطیل است اگر و تنها اگر دو قطر آن با هم برابر باشند.

۴ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره $p$	گزاره $q$	ارزش $p$	ارزش $q$	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
				ن	
	چنین نیست که ۵ گنگ باشد		د		
					د
					ن
	عدد ۱ مربع کامل است				

۵ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، هم ارزی‌های منطقی زیر را ثابت کنید.

الف)  $p \wedge (q \vee p) \equiv p$

ب)  $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

ج)  $p \vee F \equiv p$

د)  $p \wedge T \equiv p$

ه)  $[(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)] = p \Leftrightarrow \sim q$  و  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) = T$

۶ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف)  $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$

ب)  $\exists x \in \mathbb{N} : x + 1 \leq 2$

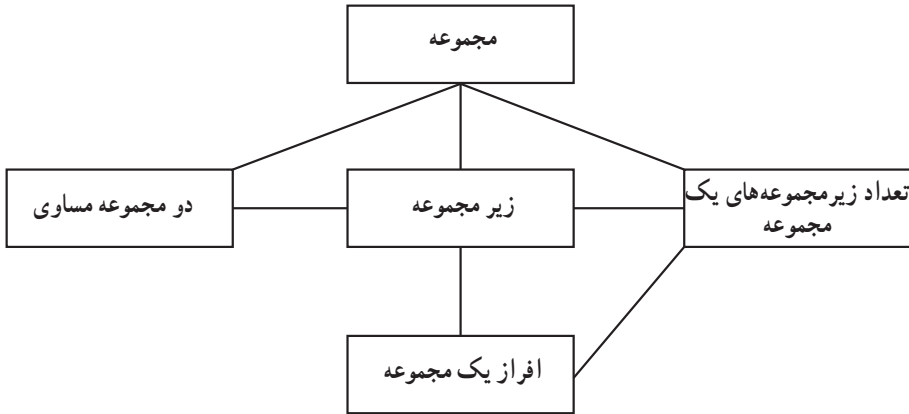
ج)  $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 3x + 1 = 0$

د)  $\exists x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow x^2 \geq 1$



## درس دوم مجموعه — زیرمجموعه

### نمودار مفهومی



### اهداف

- ۱ بی بردن به اهمیت و کاربرد نظریه مجموعه ها و کاربرد درس ۱ در این درس.
- ۲ دانش آموزان بتوانند مسائل مربوط به تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه را حل کنند.
- ۳ دانش آموزان قادر باشند برای یک مجموعه افرازه های متفاوتی را تشکیل دهند.
- ۴ دانش آموزان توانایی بیان ریاضی زیرمجموعه را داشته باشند و از گزاره های سوری و نقیض آنها در بیان ریاضی مفاهیم مجموعه ها استفاده کنند.
- ۵ دانش آموزان قادر باشند با استفاده از روش عضوگیری دلخواه زیرمجموعه بودن و تساوی بین دو مجموعه را ثابت کنند.

## پیش‌دانسته‌ها

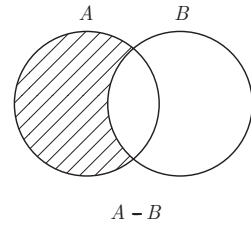
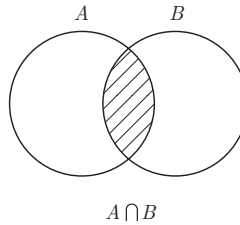
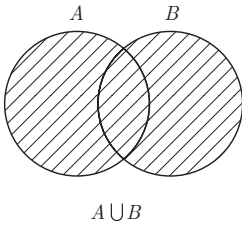
\* مفهوم مجموعه (گردایه‌ای از اشیاء دوبه‌دو متمایز و مشخص)

\* مفهوم عضویت

\* مفهوم جزئیت (زیرمجموعه)

\* مجموعه تهی، مرجع و متمم

\* اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل



## سؤال تشخیصی و تکمیلی

۱ اگر  $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, b\}, \{b\}\}$  کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

$$\{a\} \in A \quad ; \quad \{a\} \subseteq A \quad ; \quad \{a, \{a\}\} \subseteq A$$

$$\{a, \{a\}\} \in A \quad ; \quad \{a, b\} \subseteq A \quad ; \quad \{\{a\}, \{b\}\} \subseteq A$$

۲ هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4)(x^2 - 2)(2x + 1) = 0\} \text{ (الف)}$$

$$B = \{2^{\frac{n}{2}} \mid n \in \{2, 4, 6, 8\}\} \text{ (ب)}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x < 5\} \text{ (ج)}$$

## دانش افزایی

برای بیان تئوری مجموعه‌ها، ابتدا «مجموعه» و «متعلق است به» را دو مفهوم اولیه در نظر می‌گیرند سپس بقیه اصطلاحات و تعاریف را به کمک این دو مفهوم و استفاده از دستور زبان منطقی ریاضی بیان می‌کنند.

برای مثال برای تعریف  $A \subseteq B$  به کمک روش عضوگیری دلخواه، داریم:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

همچنین داریم:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \quad (\text{الف})$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \quad (\text{ب})$$

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \quad (\text{ج})$$

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$$

د) اگر  $A'$  متمم مجموعه  $A$  باشد داریم:

در کتاب بعد از بیان تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه و افزایش یک مجموعه، با روش عضوگیری دلخواه تعدادی خاصیت و قانون بیان و اثبات می‌کنیم، سپس در درس بعدی به کمک این خواص به بیان جبر مجموعه‌ها خواهیم پرداخت.

### تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  دارای  $2^3 = 8$  زیرمجموعه است که هر زیرمجموعه مانند  $A = \{a, b\}$  را توسط ارقام  $\circ$  و  $\wedge$  و متناظر با یک کد سه رقمی به صورت  $\circ \wedge \circ$  نشان می‌دهیم. جدول زیر بر اساس این قرار داد تنظیم شده است.

کد سه رقمی			زیر مجموعه
$a$	$b$	$c$	
$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\{a, b, c\}$
$\wedge$	$\wedge$	$\circ$	$\{a, b\}$
$\wedge$	$\circ$	$\wedge$	$\{a, c\}$
$\circ$	$\wedge$	$\wedge$	$\{b, c\}$
$\wedge$	$\circ$	$\circ$	$\{a\}$
$\circ$	$\wedge$	$\circ$	$\{b\}$
$\circ$	$\circ$	$\wedge$	$\{c\}$
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\{\}$

به همین ترتیب اگر مجموعه  $A$  دارای ۴ عضو باشد، هر زیر مجموعه  $A$  را می توان توسط یک کد ۴ رقمی متناظر کرد.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$A_1 = \{a, b, d\} \rightarrow 1101$$

$$A_2 = \{a, c\} \rightarrow 1010$$

⋮

$$A_{16} = \{ \} \rightarrow 0000$$

در این مرحله و با استفاده از اصل ضرب که سال گذشته دانش آموزان با آن آشنا شده اند، می خواهیم تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه  $n$  عضوی را به دست آوریم:

اگر  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  مفروض باشد هر زیرمجموعه از  $A$  را می توان با یک کد  $n$  رقمی که توسط ۰ یا ۱ به ازای هر رقم آن به کار می بریم، متناظر کرد.

(منظور از تناظر این است که به ازای هر زیرمجموعه یک کد و به ازای هر کد یک زیرمجموعه وجود دارد)

بنابراین تعداد کدهای  $n$  رقمی که هر رقم آن ۰ و ۱ باشد برابر است با تعداد زیرمجموعه ها و طبق اصل ضرب داریم:

$$\text{تعداد کدها} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ مرتبه}} = 2^n$$

### افراز یک مجموعه

در بین زیرمجموعه های مجموعه ای چون  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، زیرمجموعه هایی یافت می شوند که از سه ویژگی برخوردارند.

اول: اینکه هیچ کدام تهی نیستند.

دوم: اینکه دویله دو جدا از هم هستند.

سوم: اینکه اجتماع آنها برابر با مجموعه  $A$  می شود.

### روش تدریس

از دانش آموزان می خواهیم که برای مجموعه ای چون  $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$  یک بار دو زیرمجموعه و یک بار سه زیرمجموعه پیدا کنند که سه ویژگی مذکور را داشته باشد.

در حالت اول یک افراز دو عضوی از  $A$  داریم و در حالت دوم یک افراز سه عضوی از  $A$  خواهیم داشت.

توجه :

اگر بخواهیم تعداد همهٔ افزای‌های دو عضوی  $A$  را محاسبه کنیم در واقع باید تعیین کنیم به چند صورت می‌توان  $A$  را به دو قسمت یا دو زیرمجموعهٔ جدا از هم و ناتهی تقسیم‌بندی کرد. در بخش احتمال، وقتی که می‌خواهیم قانون احتمال کل و قانون بیز را بیان کنیم، نیاز به مفهوم افزای کردن داریم.

### تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی

پیش‌دانسته‌ها

\* تعریف توصیفی زیرمجموعه

\* آشنایی با سورهای عمومی و وجودی

\* نقیض گزاره‌ای که با سور عمومی بیان شده است.

\* نقیض یک گزاره شرطی.

روش تدریس

ابتدا از دانش‌آموزان می‌خواهیم که بررسی کنند آیا مجموعهٔ  $A = \{1, 2, 3\}$  زیر مجموعه

$$B = \{1, 2, 4\}$$
 هست یا خیر؟

بنابراین برای اینکه نشان دهیم،  $A \not\subseteq B$ ، کافی است یک عضو در  $A$  پیدا کنیم که آن عضو

در  $B$  نباشد، اکنون معادل این گزاره را با زبان ریاضی و با استفاده از سورها می‌نویسیم.

می‌دانیم که  $(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$  زیرا :

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

همچنین می‌دانیم  $(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$

بنابراین داریم :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv A \not\subseteq B \Leftrightarrow \sim [\forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B)]$$

بنابراین داریم :

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x : \sim (x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x : (x \in A \wedge x \notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه (برای اثبات زیر مجموعه بودن)

ابتدا برای یادگیری این روش ایجاد انگیزه می کنیم، از دانش آموزان می خواهیم که نشان دهند مثلاً مجموعه  $A = \{۲, ۴, ۶\}$  زیر مجموعه  $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶\}$  است. واضح است که دانش آموزان به راحتی و با در نظر گرفتن تک تک اعضای  $A$  که باید در  $B$  باشند، این کار را انجام می دهند.

اکنون از آنها می خواهیم که با فرض  $A \subseteq B$  نشان دهید که  $B' \subseteq A'$  است و چون اعضای  $A$  و  $B$  معلوم و مفروض نیستند، بنابراین به روش قبلی نمی توانند این کار را انجام دهند، بنابراین باید از روش عضوگیری دلخواه این حکم در زیر مجموعه ها را اثبات کنند، یعنی از آنجا که  $A \subseteq B$  و

می خواهیم ثابت کنیم که  $B' \subseteq A'$  باید نشان دهیم که :

$$\forall x : x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A'$$

همان طور که ملاحظه می کنید : برای هر  $x$  که  $x \in B'$  نتیجه گرفتیم که  $n \in A'$  پس  $B' \subseteq A'$ .

سؤال تکمیلی

اگر  $A \subseteq B$  و  $C \subseteq D$  ثابت کنید :

(ب)  $A - D \subseteq B - C$

(الف)  $A \cap C \subseteq B \cap D$

از خواص بالا در درس بعدی در اثبات قضیه ای استفاده خواهیم کرد.

## دو مجموعه مساوی (با زبان ریاضی)

ابتدا تساوی بین دو مجموعه را با شکل و به صورت توصیفی بیان کنید. در سال های قبل دانش آموزان به صورت توصیفی مفهوم دو مجموعه مساوی را می دانند. اکنون می خواهیم با زبان ریاضی تعریف دو مجموعه مساوی را بنویسند.

از دانش آموزان خواهیم که مجموعه ای مساوی با مجموعه  $A = \{۲, ۳, ۴, ۵\}$  بنویسند و آن را  $B$  بنامند.

اکنون ملاحظه می کنید که هم  $A \subseteq B$  و هم  $B \subseteq A$ ، یعنی هر عضو در  $A$  موجود باشد در  $B$

هم است و برعکس.

در نتیجه از اینجا تعریف دو مجموعه مساوی را با زبان ریاضی می‌نویسیم.

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x: x \in B \Rightarrow x \in A)$$

$$\equiv A=B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

مثال. کدام یک از روابط زیر درست است.

الف)  $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 1, 2\}$

ب)  $\{1, 2, 3, \{4\}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

ج)  $\{1\} = \{\{1\}\}$

## نمونه سؤالات ارزشیابی درس دوم

۱ مجموعه  $\{0, 4, 8, 12, \dots\}$  برابر با کدام یک از مجموعه‌های زیر است؟

ب)  $\{x \mid x = 4k, k \in w\}$

الف)  $\{x \mid x = 2^k, k \in w\}$

۲ مجموعه  $A$  پنج عضو دارد، این مجموعه چند زیرمجموعه ۲ عضوی، چند زیرمجموعه

سه عضوی دارد؟ چرا؟

۳ مجموعه همه زیرمجموعه‌های  $A$  دارای ۲۵۶ عضو است، تعداد اعضای  $A$  را به دست

آورید؟

۴ ثابت کنید که برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  داریم:

ب)  $A \cap B \subseteq A$

الف)  $A \subseteq A \cup B$

۵ در هر یک از حالت‌های زیر سه مجموعه مانند  $A$  و  $B$  و  $C$  مثال بزنید به طوری که در روابط

داده شده صدق کنند.

ب)  $A \subseteq B$  و  $A \in B$  و  $B \subseteq C$

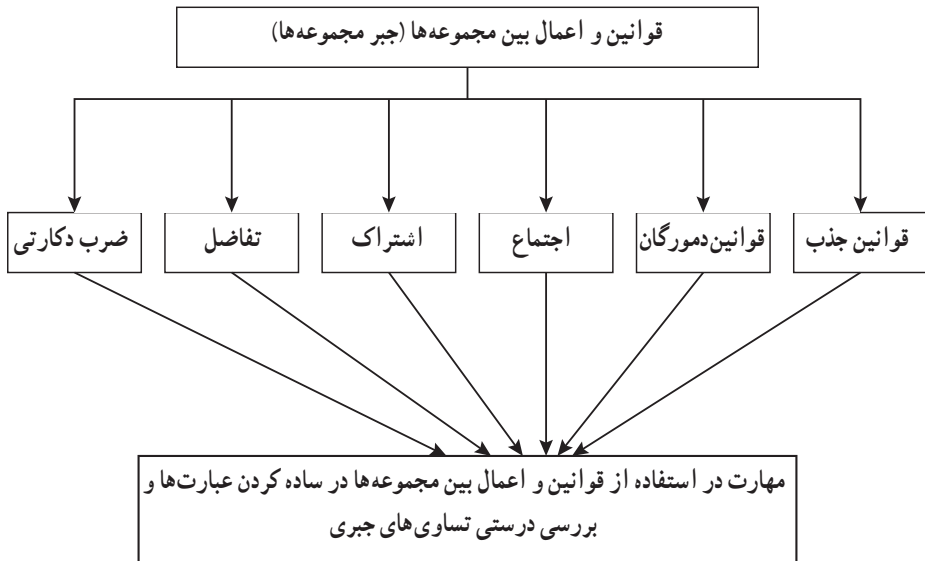
الف)  $A \subseteq B \subseteq C$

۶ افرازهای دوتایی یک مجموعه سه عضوی را بنویسید.

۷ افرازهای ۲ تایی و افرازهای ۳ تایی یک مجموعه چهار عضوی را بنویسید.

## درس سوم : جبر مجموعه‌ها

### نقشه مفهومی درس سوم





## قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

### اهداف درس سوم

۱ آشنایی با اعمال اجتماع، اشتراک، تفاضل و ضرب دکارتی بین مجموعه‌ها و قوانین

جذب و دموگران

۲ مهارت استفاده از نمودار ون و روش عضوگیری برای اثبات درستی تساوی‌های جبری

مجموعه‌ها

۳ مهارت ساده کردن عبارت‌ها و بررسی درستی تساوی‌های جبری به کمک قوانین و اعمال

بین مجموعه‌ها

۴ مهارت در تشکیل مجموعه و رسم نمودار مختصاتی عمل ضرب دکارتی بین مجموعه‌ها

روش تدریس

در ابتدای درس، خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای اعمال جمع و ضرب بیان شد، تا زمینه مناسبی برای شروع بررسی این خواص در اعمال بین مجموعه‌ها باشد. واضح است که خاصیت جابه‌جایی و شرکت‌پذیری در اعمال جمع و ضرب برقرار است. همچنین خاصیت توزیع‌پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع برقرار می‌باشد، ولی خاصیت توزیع‌پذیری عمل جمع نسبت به عمل ضرب برقرار نیست. از دانش‌آموزان خواسته شده که با ذکر یک مثال، نقض این

$$\text{مطلب را نشان دهند. مثل : } \underbrace{2 + (3 \times 4)}_{14} \neq \underbrace{(2 + 3) \times (2 + 4)}_{30}$$

در اولین فعالیت دانش‌آموزان خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری را برای اعمال اجتماع و اشتراک ابتدا با کمک نمودار ون و با مثال عددی بررسی می‌کنند. هدف از استفاده نمودار ون این است که بیان تصویری برای اثبات درستی تساوی‌های جبری مجموعه‌ها، به درک بهتر دانش‌آموزان کمک می‌کند.

در کار در کلاس صفحه ۲۸ کتاب، خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای اعمال اجتماع با استفاده از روش عضوگیری اثبات می‌شود. دانش‌آموزان با پر کردن جاهای خالی، اثبات‌ها را کامل می‌کنند و با نحوه اثبات آشنا می‌شوند. با توجه به این کار در کلاس که برای عمل اجتماع بیان شد، می‌توانند تمرین ۱ صفحه ۳۸ کتاب که بررسی خاصیت‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای عمل اشتراک است، را به‌طور مشابه ثابت کنند.

با توجه به تعریف متمم، قوانینی برای اعمال اجتماع و اشتراک مطرح شد. بعد از آن قضیه‌ای مربوط به زیرمجموعه بیان و اثبات شد و قوانین جذب (هم‌پوشانی) مطرح گردید. برای اثبات قوانین جذب، ابتدا از دانش‌آموزان خواسته شده، با استفاده از نمودار ون، درستی این قوانین را نشان دهند و بعد با استفاده از خواص و قوانین بین مجموعه‌ها جاهای خالی را کامل کنند. برای درک بهتر دانش‌آموزان، مثال‌هایی نیز مطرح شده است.

در فعالیت صفحه ۳۲ کتاب، قوانین دمورگان معرفی می‌شوند. دانش‌آموزان با کمک نمودار ون و با مثال عددی، قوانین دمورگان را نتیجه می‌گیرند. پس از آشنایی با قوانین دمورگان، با استفاده از روش عضوگیری و تعریف تساوی بین دو مجموعه، درستی این قوانین را اثبات می‌کنند.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$\forall x: x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \sim (x \in A \cup B) \Leftrightarrow \sim (x \in A \vee x \in B)$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$\forall x: x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \sim (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \sim (x \in A \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in A' \vee x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$$

حل کار در کلاس صفحه ۳۳ کتاب :

$$\text{الف) } (A - B)' = A' \cup B$$

$$(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$$

$$(A - B) - C = (A - C) - B$$

$$\text{ب) } (A - B) - C = (A \cap B') - C = (A \cap B') \cap C' = (A \cap C') \cap B' = (A - C) \cap B' =$$

$$(A - C) - B$$

$$\text{پ) } A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C') = (A \cap B') \cup (A \cap C') =$$

$$(A - B) \cup (A - C)$$

حل کار در کلاس صفحه ۳۴ کتاب :

۱

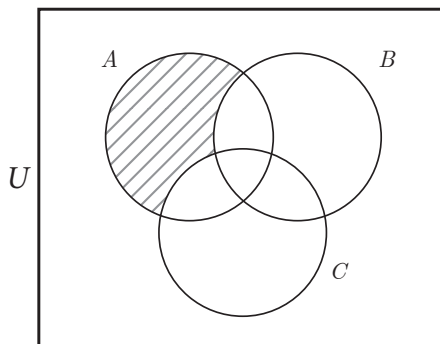
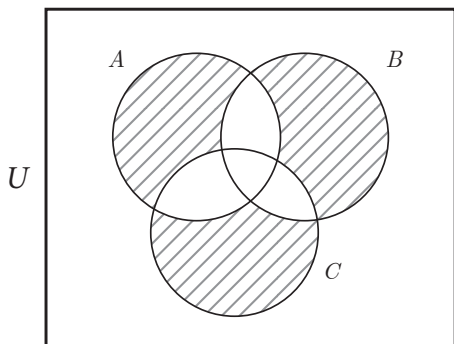
$$\text{الف) } (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap \underbrace{(B' \cup B)}_U = A = \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$\text{ب) } (A - B) \cup ((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A']) = A - B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\underbrace{\underbrace{(B \cap A')}_{A'}}_{\emptyset}$$

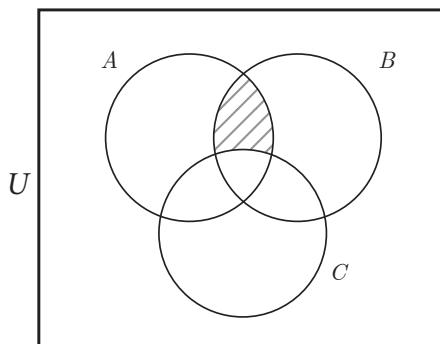
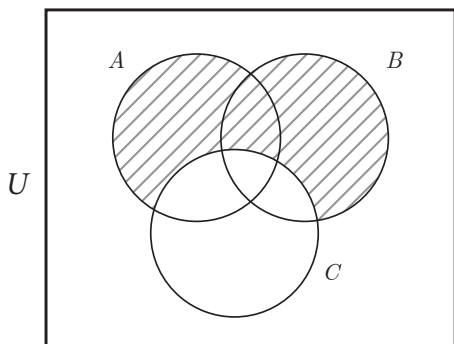
۲ الف) اعضای که فقط در  $A$  باشند.

ب) اعضای که فقط در یک مجموعه باشند.



ت) اعضای که در  $A$  یا  $B$  باشند ولی در  $C$  نباشند.

پ) اعضای که در  $A$  و  $B$  باشند ولی در  $C$  نباشند.



در صفحه ۳۵ کتاب، عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه معرفی می‌شود. در ابتدا تعریف زوج مرتب بیان شده که دانش‌آموزان از قبل با آن آشنا هستند و می‌دانند برای اعضای زوج مرتب، ترتیب قائل می‌شویم، به طوری که  $(x,y) \neq (y,x)$  از طرفی شرط لازم و کافی برای اینکه دو زوج مرتب با یکدیگر مساوی باشند، این است که مؤلفه‌های نظیر با هم برابر باشند.

$$(x,y) = (z,t) \Leftrightarrow x=z \wedge y=t$$

سپس تعریف عمل ضرب دکارتی بین مجموعه‌ها همراه با مثالی بیان شده است و این مثال نشان می‌دهد که در عمل ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی برقرار نیست. یعنی در حالت کلی  $A \times B$

با  $B \times A$  برابر نیست. البته اگر  $A$  مساوی  $B$  باشد یا یکی از دو مجموعه  $A$  یا  $B$  تهی باشد، در این صورت  $A \times B$  می‌تواند با  $B \times A$  برابر باشد.

$$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

در کار در کلاس از دانش‌آموزان خواسته شده با استفاده از تعریف ضرب دکارتی و با فرض  $n(A) = m$  و  $n(B) = k$  نشان دهند:

$$n(A \times B) = mk$$

هر عضو مجموعه  $A$  با هر کدام از اعضای مجموعه  $B$  تشکیل زوج مرتب می‌دهد و چون تعداد اعضای مجموعه  $B$  برابر  $k$  عضو است، پس  $k$  زوج مرتب تشکیل می‌شود. از طرفی تعداد اعضای مجموعه  $A$  برابر  $m$  است، پس به تعداد  $m \times k$  زوج مرتب خواهیم داشت.

$$(n(A) = m \wedge n(B) = k) \rightarrow n(A \times B) = n(A) \times n(B) = m \times k$$

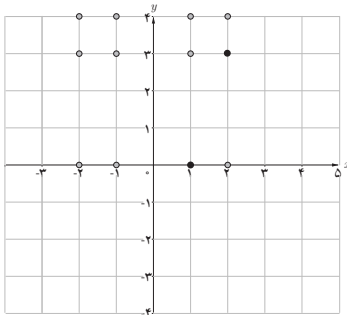
حل فعالیت صفحه ۳۶ کتاب:

$$B = \{0, 3, 4\} \quad , \quad A = \{1, -1, 2, -2\} \quad \blacksquare$$

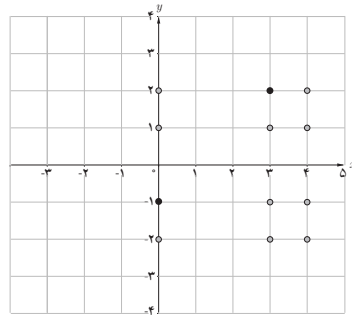
با توجه به اعضای دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، اعضای مجموعه ضرب دکارتی  $B \times A$  و  $A \times B$  به صورت زوج مرتب می‌باشند. هر زوج مرتب  $(x, y)$  را به صورت نقطه‌ای در دستگاه محورهای مختصات نشان می‌دهیم.

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 3), (1, 4), (-1, 0), (-1, 3), (-1, 4), (2, 0), (2, 3), (2, 4), (-2, 0), (-2, 3), (-2, 4)\}$$

$$B \times A = \{(0, 1), (0, -1), (0, 2), (0, -2), (3, 1), (3, -1), (3, 2), (3, -2), (4, 1), (4, -1), (4, 2), (4, -2)\}$$



نمودار مختصاتی  $A \times B$



نمودار مختصاتی  $B \times A$

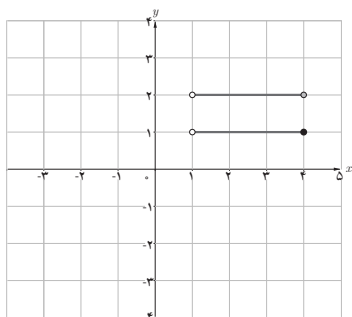
$$B = \{1, 2\} \quad \text{و} \quad A = (1, 4] \quad \text{۲}$$

در این قسمت، مجموعه‌های  $A$  و  $B$  به صورت پیوسته (بازه) هستند.

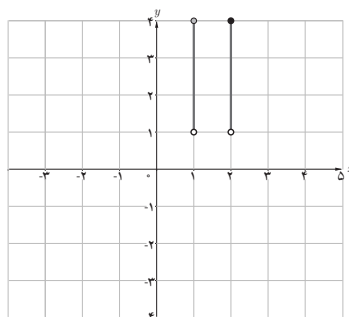
$$A \times B = \{(x, y) \mid 1 < x \leq 4 \wedge (y=1 \vee y=2)\}$$

$$B \times A = \{(x, y) \mid (x=1 \vee x=2) \wedge 1 < y \leq 4\}$$

همان‌طور که در شکل رسم شده در نمودار مختصاتی کتاب مشاهده می‌شود، مجموعه  $A \times B$  شامل همه نقاطی از صفحه مختصات است که طول آن نقاط، هر عدد حقیقی بین ۱ و ۴ می‌تواند باشد، ولی عرض همه نقاط ثابت و برابر ۱ است. پس شکل حاصل از وصل بی‌شمار نقطه به یکدیگر، پاره‌خطی به طول ۳ و موازی محور  $x$ ‌ها است. به همین ترتیب پاره‌خط بعدی که طول نقاط آن، هر عدد حقیقی بین ۱ و ۴ می‌باشد و عرض همه نقاط آن ثابت و برابر ۲ است، رسم می‌شود.



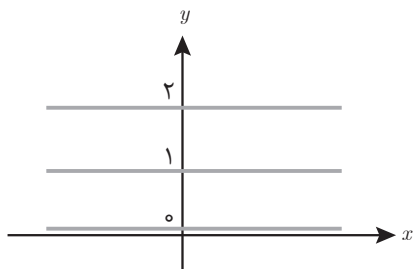
نمودار  $A \times B$



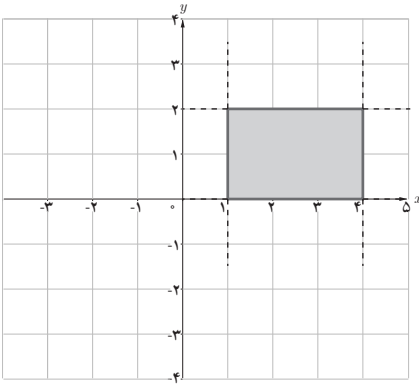
نمودار مختصاتی  $B \times A$

$$B = \{0, 1, 2\} \quad \text{و} \quad A = \mathbb{R} \quad \text{۳}$$

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge (y=0 \vee y=1 \vee y=2)\}$$



$$A \times B = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 2\} \quad \text{۴}$$



$$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} \quad \text{۵}$$

مجموعه  $A \times B$ ، شامل تمام نقاط صفحه مختصات است.

در کار در کلاس صفحه ۳۷ کتاب، قسمت الف، مسئله  $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$  را داریم که به روش برهان خلف اثبات می‌شود. دانش‌آموزان در درس اول صفحه ۱۱ کتاب، با عکس نقیض ترکیب شرطی آشنا شده‌اند و می‌دانند هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

در عکس نقیض ترکیب شرطی، نقیض حکم را نوشته و به عنوان فرض جدید در نظر می‌گیریم، سپس در جهت اثبات، به تناقضی با فرض مسئله می‌رسیم.

یکی از روش‌های اثبات در برهان و منطق، استفاده از روش اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف است. در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست است و آن را فرض خلف در نظر می‌گیریم، سپس با استفاده از آن و با توجه به اعمالی که انجام می‌گیرد به تناقضی با فرض مسئله یا تناقضی با عبارت بدیهی می‌رسیم و نتیجه می‌گیریم که فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

$$\emptyset \times A = \emptyset$$

اثبات: فرض کنیم  $\emptyset \times A = \emptyset$  (فرض خلف)، بنابراین داریم:

$$\exists (x, y) \in (\emptyset \times A) \Rightarrow x \in \emptyset \wedge y \in A$$

گزاره  $x \in \emptyset$  همواره نادرست بوده و تالی گزاره شرطی فوق که از فرض خلف حاصل شده، ارزش نادرست داشته و کل گزاره شرطی نادرست خواهد شد (مقدم را درست فرض کرده‌ایم)، یعنی

نمی‌تواند  $(x, y)$  ای در  $A \times \emptyset$  موجود باشد، که با فرضی که در نظر گرفته‌ایم در تناقض است، بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

توصیه آموزشی

به همکاران محترم توصیه می‌شود:

- به دانش‌آموزان تأکید داشته باشند در هر مرحله برای ساده کردن عبارات‌ها یا بررسی درستی تساوی‌های جبری، از هر خواص، قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها که استفاده می‌کنند، نام آن را بنویسند، چون به درک بهتر آنها از درس کمک می‌کند.
- به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل دشوار اجتناب کنند.

## اشباهات رایج دانش‌آموزان

ممکن است برخی از دانش‌آموزان در ابتدا برای تشکیل مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها در عمل ضرب دکارتی با مشکل مواجه شوند.

برای رفع این مشکل می‌توانند از جدولی مانند جدول ضرب استفاده کنند. به‌عنوان مثال:

$$A = \{a, b\}, \quad B = \{c, d, e\} \rightarrow A \times B = ?$$

$A \setminus B$	$c$	$d$	$e$
$a$	$(a, c)$	$(a, d)$	$(a, e)$
$b$	$(b, c)$	$(b, d)$	$(b, e)$

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

حل تمرینات برگزیده درس سوم صفحه ۳۸ کتاب

۱ با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) اثبات  $A \cap B = B \cap A$ :  $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in U \mid x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$

پ)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  اثبات:  $\forall x: x \in [A \cap (B \cup C)] \Rightarrow [x \in A \wedge x \in (B \cup C)]$   
 $\Rightarrow [x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)] \Rightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)]$   
 $\Rightarrow [x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)] \Rightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$   
 $\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

به همین ترتیب ثابت می‌شود:  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$  ، بنابراین داریم:  
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۲) درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف)  $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = (A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B') = A \cap U = A$

ت)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup A) \cup (B \cup C) = A \cup [A \cup (B \cup C)] = A \cup [(A \cup B) \cup C]$   
 $A \cup [C \cup (A \cup B)] = (A \cup C) \cup (A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

۳) هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف)  $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$

اگر دو عبارت اول را در یک پراتز قرار دهیم، داریم:

$$\left( (A' \cap B) \cup \underbrace{[(B \cap A) \cap B]}_{(B \cap B) \cap A = B \cap A} \right) \cap (B \cup A) = ((B \cap A') \cup (B \cap A)) \cap (B \cup A)$$

$$= (B \cap (A \cap A')) \cap (B \cup A) = (B \cap U) \cap (B \cup A) = B \cap (B \cup A) = B$$

اگر دو عبارت آخر را در یک پراتز در نظر بگیریم، داریم:

$$(A' \cap B) \cup \left( \underbrace{[(B \cap A) - B']}_{(B \cap A) \cap B = B \cap A} \cap (B \cup A) \right) = (A' \cap B) \cup \underbrace{((B \cap A) \cap (B \cup A))}_{(B \cap A)}$$

$$= (B \cap A') \cup (B \cap A) = B \cap (A' \cup A) = B \cap U = B$$

پ)  $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

$$[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B) = [(A \cup B) \cap A'] \cup (A \cap B) = \left[ \underbrace{(A' \cap A)}_{\emptyset} \cup (A' \cap B) \right] \cup (A \cap B)$$

$$= (A' \cap B) \cup (A \cap B) = B \cap \underbrace{(A' \cup A)}_U = B$$

۴) درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

ت)  $(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') = [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$



$$\left[ \underbrace{(B \cup A) \cap (B \cup B')}_{\bar{U}} \right] \cup \left[ \underbrace{(A' \cup A) \cap (A' \cup B')}_{\bar{U}} \right]$$

$$= (A \cup B) \cap (A' \cup B') = (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) - (A \cap B)$$

ج)  $B = B \cup (A \cap B) = B \cup (A \cap C) = (B \cup A) \cap (B \cup C)$   
 $= (A \cup C) \cap (B \cup C) = C \cup (A \cap B) = C \cup (A \cap C) = C$

۵ اگر  $A = \{y+2, 5, z\}$ ،  $B = \{x+1, 4, -2\}$  در این صورت با فرض  $A \times B = B \times A$  بیشترین مقدار برای  $x+y+z$  را بیابید. چون در این سؤال  $A, B \neq \emptyset$  هستند، پس طبق مسئله کار در کلاس قسمت ب صفحه ۳۷ کتاب داریم:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B$$

بنابراین:  $\{y+2, 5, z\} = \{x+1, 4, -2\}$ . بدیهی است که  $x+1$  فقط می‌تواند با عدد ۵ برابر باشد، پس  $x=4$ . در این صورت دو حالت خواهیم داشت:

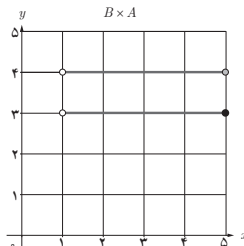
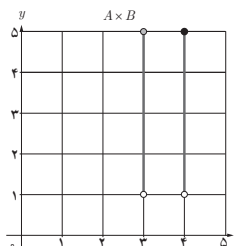
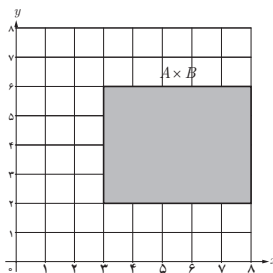
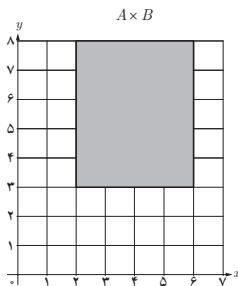
$$\begin{cases} y+2=4 \rightarrow y=2 \\ z=-2 \end{cases} \rightarrow x+y+z = 4+2+(-2) = 4$$

$$\begin{cases} y+2=-2 \rightarrow y=-4 \\ z=4 \end{cases} \rightarrow x+y+z = 4+(-4)+4 = 4$$

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هریک از حاصل ضرب‌های  $A \times B$ ،  $B \times A$  را رسم کنید.

ب)  $B = [3, 8]$ ،  $A = [2, 6]$

ب)  $B = (1, 5)$ ،  $A = \{3, 4\}$



## نمونه سؤال‌های ارزشیابی درس سوم

۱ ثابت کنید اگر  $A \subset B$ ، آنگاه  $A \cap B' = \emptyset$

۲ ثابت کنید برای هر سه مجموعه  $A, B, C$  از  $A \subset B$  نتیجه می‌شود:  $A \cup C \subset B \cup C$

۳ ثابت کنید اگر  $B - A = A - B$ ، آنگاه  $A = B$

۴  $x, y$  را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب زیر با هم مساوی باشند.

الف)  $(x-y, 2x-2), (2y+3, x+y)$

ب)  $(4x, y^2+6y+3^0), (3x^2+1, 2y^2-y)$

۵ با روش عضوگیری ثابت کنید برای هر سه مجموعه دلخواه مانند  $A, B, C$  داریم:

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

۶ اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$  باشند، نمودارهای  $A \times B$

$B \times A$ ،  $(A \times B) - (B \times A)$  را رسم کنید.

۷ اگر  $A = [0, 1]$ ،  $B = \{0, 1\}$  باشند، نمودارهای مختصاتی  $A \times B$ ،  $B \times A$ ،  $(A \times B) \cup (B \times A)$

را رسم کنید.

۸ اگر  $A = [1, 4]$ ،  $B = [3, 5]$  باشند، نمودارهای مختصاتی  $A^2$ ،  $B^2$ ،  $A^2 - B^2$  را رسم

کنید.

۹ اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند و  $A \cap B = \emptyset$ ، کدام گزاره زیر درست است؟

الف)  $(A - B) \cup (B - A) = B$       ب)  $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$

پ)  $(A - B) \cup (B - A) = A$       ت)  $(A - B) \cup (B - A) = A' \cup B'$

۱۰ اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه از اعداد حقیقی به صورت  $A = [-2, 3]$ ،  $B = [2, 5]$  تعریف

شوند، مساحت ناحیه  $A^2 - A \times B$  را به دست آورید.

۱۱ اگر  $A = \{a, b, c\}$ ،  $B = \{1, 2\}$ ، مطلوب است محاسبه: الف)  $(B \times A) - (A \times B)$

ب)  $B^2 - A^2$

۱۲ فرض کنید  $U$  مجموعه مرجع باشد، تعیین کنید کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است

و سپس رابطه درست را بنویسید.

الف) اگر  $A=B'$  آنگاه  $B=A'$  (ب)  $(A')'=U$

پ)  $(A-B)'=A'-B'$  (ت)  $(A \cup B)-B=A-B$

ث)  $(A-B) \cup B=A-B$  (ج) اگر  $A \cap B = \emptyset$  آنگاه  $A \subseteq B'$

۱۳ ساده شده متمم عبارت  $[A-(B-A)] \cup [A-(A-B)]$  چیست؟

۱۴ اگر  $A \cup B = A \cup C$  ،  $A-B=A-C$  نتیجه بگیرید:  $B=C$

۱۵ از  $A \cup B=C$  ،  $A \cap B = \emptyset$  نتیجه بگیرید:  $A=C-B$

۱۶ درستی تساوی‌های زیر را بدون استفاده از نمودار ون و با استفاده از قوانین موجود در

مجموعه‌ها ثابت کنید.

الف)  $(A-B)-C = (A-C) \cap (A-B)$  (ب)  $(A'-B) \cup (B' \cup A)' = A'$

ج)  $(A \cap B) - (A \cap B') = A \cap B$

ت)  $[A \cup (A \cap B)]' - [B' \cap (A' \cup B')] = B - A$

ث)  $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$

۱۷ طرف دوم تساوی‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $(A \cap B \cap C) \cup (A-C) \cup (A \cap B')$  (ب)  $[(A \cup B) - A'] \cup [B' \cap (A \cup B)]$

پ)  $[(A \cup U')' \cap A] - [(A \cap U')' - A']$  (ت)  $(A-B) \cup [B \cap (A \cup B)]$

۱۸ با استفاده از نمودار ون نشان دهید اگر  $A \subset B$  باشد، نتیجه می‌شود:  $B' \subset A'$

۱۹ با کمک نمودار ون درستی تساوی‌های زیر ثابت کنید.

الف)  $(A-B) \cap C = (A \cap C) - B$  (ب)  $(A \cup B) - (B \cup C) = (A-B) - C$

۲۰ اگر  $B-C=B'$  ثابت کنید:  $(B \cap C') \cup (B' \cap C) = B'$

۲۱ با ذکر یک مثال نشان دهید:  $A \cup (B-C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$

۲۲ اگر  $A \cap B = \{x \mid x \in Z, -1 \leq x < 5\}$  و  $A \cap C = \{x \mid x \in Z, -3 < x < 3\}$  ، حاصل

$A \cap (B \cup C)$  را بیابید.

۲۳ اگر  $A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\}$  ، طرف دوم تساوی‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

ب)  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

۲۴ اگر  $U = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 7\}$ ،  $A = \{3k-1 \mid k \in \mathbb{N}, 4 \leq k \leq 7\}$ ،  $B = \{14, 17, 20\}$

حاصل عبارت  $(A \cup B)' \cap C'$  چیست؟

۲۵ اگر  $Z$  مجموعه مرجع باشد و  $A \cup B' = \{x \mid x \in Z, x' > 25\}$ ، مجموعه  $A' \cap B$  را با

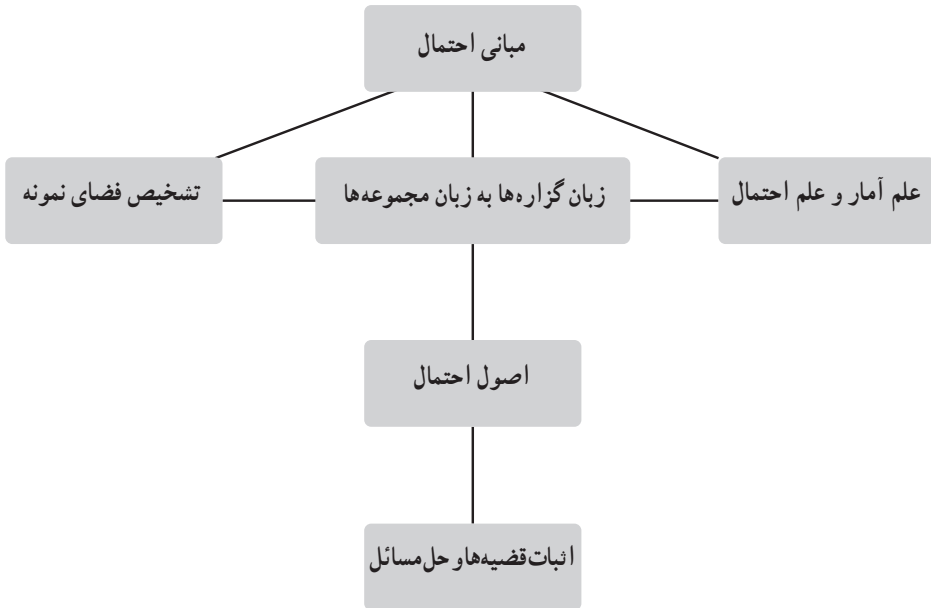
اعضایش مشخص کنید.

## فصل دوم

احتمال

# درس اول : مبانی احتمال

## نقشه مفهومی



## اهداف

- ۱ توانایی تشخیص علم آمار از علم احتمال در مسائل کاربردی
- ۲ تبدیل گزاره‌های یک مسئله به زبان مجموعه‌ها در مسائل احتمال
- ۳ تشخیص ارتباط وقوع پیشامدهای  $A_1 \cap A_2$  و  $A_1 \cup A_2$  با پیشامدهای  $A_1$  و  $A_2$ .
- ۴ بیان فضای نمونه به شکل حاصل ضرب دکارتی و جایگشت در مسائل خاص احتمال
- ۵ دانستن اصول احتمال و استفاده از آنها در اثبات مسائل
- ۶ استفاده از قضایا و اصول احتمال در حل مسائل کاربردی

## روش تدریس

نخستین درس از فصل دوم به مبانی احتمال می‌پردازد. ترجمه زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها، تشخیص فضای نمونه و استفاده از اصول احتمال در اثبات مسائل و قضیه‌ها، اهم مفاهیم این درس هستند.

شروع درس با طرح مسئله‌ای است که دانش‌آموز را درگیر دو مفهوم «علم آمار» و «علم احتمال» کند و در ادامه به بیان هرکدام از این مفاهیم می‌پردازد. در علم احتمال، یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم انتخاب می‌شود و در علم آمار، کار برعکس است، یعنی قرار است یک جامعه نامعلوم را از یک نمونه مشخص مورد ارزیابی قرار دهیم. کار در کلاس صفحه ۴۱ برای تمرین این دو مفهوم است.

فعالیت صفحه ۴۱ و در ادامه، کار در کلاس صفحه ۴۲، مسئله انتخاب لامپ توسط برق‌کار مطرح می‌شود. برق‌کار نیاز به یک لامپ سالم دارد که در جعبه اول و در جعبه دوم به ترتیب ۵ و ۲۰ لامپ موجود بوده به طوری که در اولی ۳ و در دومی ۱۳ لامپ سالم است. بنابراین در جعبه اول  $\frac{3}{5} = 0/6$  و در جعبه دوم  $\frac{13}{20} = 0/65$  لامپ‌ها سالم‌اند، پس اگر از جعبه دوم یک لامپ به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن بیشتر است. در کار در کلاس صفحه ۴۲، اگر ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبه اول انتخاب کنیم، احتمال اینکه هر دو معیوب باشند،  $\frac{2 \times 1}{5 \times 4} = \frac{1}{10}$  و این احتمال برای جعبه دوم  $\frac{7 \times 6}{20 \times 19} = \frac{21}{190}$  است، بنابراین احتمال معیوب بودن در جعبه دوم بیشتر است و بهتر است از جعبه اول انتخاب شود.

یکی از مهم‌ترین قسمت‌ها در هر مسئله احتمال، ترجمه زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

است، یعنی دانش آموز باید بتواند جمله‌هایی که به زبان معمول نوشته شده‌اند را به شکل مجموعه بنویسد تا در مسئله احتمال، فضای نمونه و پیشامد(ها) مشخص باشد. این کار در صفحات ۴۲ و ۴۳ به آن پرداخته شده است.

کار در کلاس صفحه ۴۳ برای رفع بدفهمی‌هایی است که ممکن است در ذهن دانش‌آموزان وجود داشته باشد. با بحثی که بین زهرا و شبنم انجام می‌شود، باید نتیجه گرفت که وقوع پیشامد  $\{۲,۴,۶\}$ ، وقوع پیشامد  $\{۲\}$  را نتیجه نمی‌دهد، در حالی که عکس آن صحیح است. به بیان دیگر اگر  $A_1 \subseteq A_2$ ، وقوع پیشامد  $A_1$ ، وقوع پیشامد  $A_2$  را نتیجه می‌دهد. دو مفهوم دیگر نیز در این کار در کلاس وجود دارد که از وقوع  $A_1 \cap A_2$  و  $A_1 \cup A_2$  چه نتیجه‌هایی گرفته می‌شود. برای هر کدام می‌توانید شبیه بحث بین زهرا و شبنم، دو مباحثه ساده طرح کنید. مثلاً آیا از وقوع پیشامد  $\{۲,۴,۶\}$  وقوع حداقل یکی از پیشامدهای  $\{۲,۴\}$  و  $\{۲,۶\}$  نتیجه می‌شود یا خیر؟ و اینکه آیا از وقوع پیشامد  $\{۱,۲\}$ ، وقوع پیشامدهای  $\{۱,۲,۳\}$  و  $\{۱,۲,۴\}$  نتیجه می‌شود یا خیر؟

فضای نمونه به شکل حاصل ضرب دکارتی، آن هم از یک مسئله که نیاز است گزاره‌های ساده آن به زبان مجموعه تعبیر شوند، هدف اصلی مثال صفحه ۴۴ است. طرح سؤالات مشابه این مثال می‌تواند به عمیق شدن این مفهوم کمک کند. تمرین سوم از همین درس و سؤالات ۳ و ۴ از نمونه سؤالات ارزشیابی این درس، مثال‌های دیگری از همین نوع هستند.

بررسی اصول احتمال در صفحه ۴۵ و استفاده مکرر از اصل دوم در اثبات قضیه‌ای که در همین صفحه است، آخرین بحث از این درس است. باید دقت شود که اثبات قسمت پنجم این قضیه به کمک قسمت چهارم است و اثبات به طور مستقل برای آن توصیه نمی‌شود. مسائل ارزشیابی از این قسمت، در سطح تمرین ۴ که در صفحه ۴۷ آمده است، توصیه می‌شود و نباید مسائل پیچیده‌ای از این قسمت طرح کرد. به جای آن می‌توان از کاربرد قسمت‌های ۴ و ۵ این قضیه در حل مسائلی شبیه به آنچه در تمرین پنجم این درس است، بهره برد.

۱ اگر احمد را نفر اول و عباس را نفر دوم در نظر بگیریم، فضای نمونه در این بازی به صورت زیر است که در آن «س»، «ق» و «ک» به ترتیب وقوع سنگ، کاغذ و قیچی را نشان می‌دهند.

$$S = \{(ق, ک), (ک, ک), (س, ک), (ق, ق), (ک, ق), (س, ق), (ق, س), (ک, س), (س, س)\}$$

بنابراین فضای نمونه،  $۳ \times ۳ = ۹$  عضو دارد و پیشامدی که احمد در آن برنده است، به صورت

$$\{(س, ک), (ک, ق), (ق, س)\} \text{ می باشد.}$$



۲ فضای نمونه تمام جایگشت‌های قد این ۱۴ نفر است، پس  $n(S) = 14!$ . اگر  $A$  پیشامد این باشد که اولین نفر وارد شده، بلندقدترین عضو تیم باشد، سپس  $n(A) = 13!$

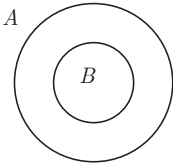
$$\text{بنابراین: } P(A) = \frac{13!}{14!} = \frac{1}{14}$$

۳ با توجه به حاصل ضرب دکارتی زیر برای تمام پیشامدها،  $n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$

$$S = \{\text{نیمه‌بری، ابری، صاف}\} \times \{\text{باد نمی‌وزد، باد می‌وزد}\} \times \{\text{مرطوب، خشک}\} \times \{\text{گرم، سرد}\} \\ \times \{\text{عدم بارش باران، بارش باران}\}$$

۴ الف) (روش اول) اگر  $B \subseteq A$  باشد، با توجه به شکل زیر، پیشامدهای  $B$  و  $A-B$  ناسازگارند

و چون  $(A-B) \cup B = A$ ، پس طبق اصول احتمال،  $P(A-B) + P(B) = P(A)$



(روش دوم) طبق یکی از قضایای اثبات شده،  $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$  و چون

$$B \subseteq A, \text{ سپس } A \cap B = B, \text{ بنابراین } P(A-B) = P(A) - P(B)$$

ب) با توجه به قسمت الف)،  $P(A) = P(A-B) + P(B)$  و چون  $P(A-B) \geq 0$ ، بنابراین

$$P(B) \leq P(A)$$

۵ اگر  $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ ، فضای نمونه و  $A$  و  $B$  به ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیری بر ۲ و

۳ باشند، پیشامد  $A \cap B$  بخش‌پذیری بر ۶ خواهد بود و داریم:

$$n(S) = 100, n(A) = \left[ \frac{100}{2} \right] = 50, n(B) = \left[ \frac{100}{3} \right] = 33, n(A \cap B) = \left[ \frac{100}{6} \right] = 16$$

بنابراین:

$$P(A) = 0/50, P(B) = 0/33, P(A \cap B) = 0/16$$

بنابراین:

الف)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/50 + 0/33 - 0/16 = 0/67$

ب)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0/50 - 0/16 = 0/34$

پ)  $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0/67 = 0/33$

## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

- ۱ کدام یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام یک مربوط به علم احتمال است؟  
 الف) از  $10^\circ$  منطقه شهرداری در یک شهر،  $7$  منطقه دارای شاخص آلودگی بیشتر از  $15^\circ$  هستند. اگر  $5$  منطقه به‌طور تصادفی انتخاب کنیم، چقدر ممکن است که هر  $5$  منطقه آلوده باشند؟  
 ب) شاخص آلودگی  $5$  منطقه از  $10^\circ$  منطقه شهرداری یک شهر گردآوری شده است. متوسط میزان آلودگی این مناطق چقدر است؟
- ۲ در پرتاب یک تاس، کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟  
 الف) اگر پیشامد  $\{1, 3, 5\}$  رخ دهد، وقوع پیشامد  $\{3\}$  نتیجه می‌شود.  
 ب) اگر پیشامد  $\{1, 3, 5\}$  رخ دهد، وقوع حداقل یکی از پیشامدهای  $\{1, 3\}$  و  $\{1, 5\}$  نتیجه می‌شود.
- پ) اگر پیشامد  $\{1\}$  رخ دهد، پیشامدهای  $\{1, 5\}$  و  $\{1, 7\}$  رخ داده است.
- ۳ برای وضعیت شغلی یک پرسش‌نامه تهیه شده که در آن سؤالاتی مطرح شده است. در هر مورد فضای نمونه پاسخ‌های ممکن را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه نوشته و تعداد اعضای فضای نمونه را مشخص کنید.  
 الف) جنسیت: مرد یا زن، شاغل: بله، خیر یا پاره‌وقت، تحصیلات: دیپلم یا پایین‌تر، فوق‌دیپلم یا لیسانس، فوق‌لیسانس یا بالاتر  
 ب) جنسیت: مرد یا زن، شاغل: بله، خیر یا پاره‌وقت، سطح درآمد: کمتر از  $2$  میلیون، بین  $2$  تا  $5$  میلیون یا بیشتر از  $5$  میلیون
- ۴ در یک بازی تاس، تاسی پرتاب می‌شود، اگر عددی زوج بیاید، دوباره می‌توانیم تاس را پرتاب کنیم و اگر فرد بیاید، کار متوقف می‌شود. فضای نمونه اعداد رو شده در این بازی را به صورت حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه نوشته و تعداد اعداد فضای نمونه را مشخص کنید.
- ۵ در یک مسابقه فرمول یک،  $24$  ماشین با یکدیگر مسابقه می‌دهند. اگر ماشین‌ها به ترتیب از خط پایان عبور کنند:

الف) فضای نمونه‌ای که رتبه ماشین‌ها را نشان دهد، چند عضو دارد؟

ب) احتمال اینکه یک راننده خاص، برنده شود چقدر است؟

۶ فقط با استفاده از اصول و قضایای احتمال، گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

$$\text{الف) } P(A-B) = P(A) - P(B)$$

$$\text{ب) } P(B) \leq P(A)$$

۷ به کمک اصول احتمال، ثابت کنید که :

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

۸ به کمک اصول و قضایای احتمال، ثابت کنید که :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۹ اگر  $P(A) = 2P(B) = 3P(A \cap B)$  باشد، حاصل  $\frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$  را به دست آورید.

۱۰ در شلیک به یک هدف، احتمال اصابت اولین گلوله ۳۷٪ و احتمال اصابت دومین گلوله

۵۳٪ است. اگر احتمال اصابت هر دو گلوله ۲۱٪ باشد، با چه احتمالی فقط یکی از دو گلوله به

هدف اصابت خواهد کرد؟

۱۱ در یک استان، ۲۵٪ جرائم در طول روز و ۸۰٪ جرائم در داخل شهر صورت می‌گیرد.

اگر تنها ۱۰٪ جرائم خارج از شهر و در طول روز واقع شوند،

الف) در این صورت چند درصد جرائم، داخل شهر و در طول شب اتفاق می‌افتند؟

ب) چند درصد آنها خارج از شهر و در طول شب اتفاق می‌افتند؟

۱۲ عددی به تصادف از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 900\}$  انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این

عدد بر ۳ بخش پذیر است، ولی بر ۴ بخش پذیر نیست؟

۱۳ دو عدد صحیح را نسبت به یکدیگر اول می‌گوییم، هرگاه تنها مقسوم‌علیه مشترک مثبت

آنها ۱ باشد، مثلاً ۸ و ۹ نسبت به یکدیگر اول اند در حالی که ۸ و ۱۰ نسبت به یکدیگر اول نیستند.

یک عدد به طور تصادفی از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 75\}$  انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد

نسبت به ۷۵ اول باشد، چقدر است؟

راهنمایی : با توجه به اینکه  $75 = 3 \times 5^2$ ، پس تنها مقسوم‌علیه‌های اول ۷۵، اعداد ۳ و ۵

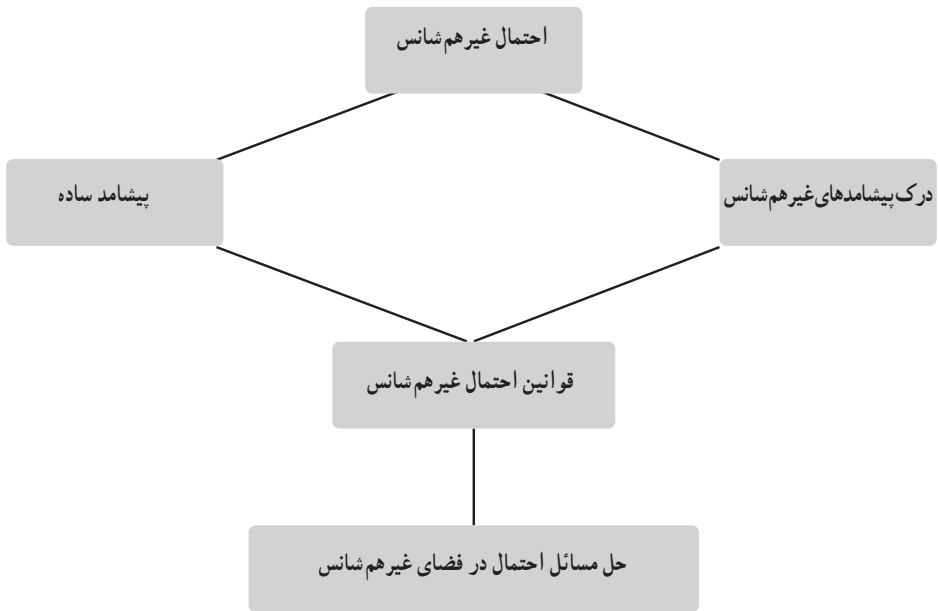
هستند، بنابراین عدد انتخاب شده نسبت به ۷۵ اول است اگر و تنها اگر مضارب ۳ و ۵ نباشند.

۱۴ از میان اعداد طبیعی زوج کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

با چه احتمالی این عدد نه بر ۲ بخش پذیر است و نه بر ۳.

## درس دوم : احتمال غیرهم شانس

### نقشه مفهومی



## اهداف

- ۱ شناخت پیشامدهای غیرهم‌شانس در زندگی روزمره و لزوم توجه به آنها
- ۲ شناخت پیشامدهای غیرهم‌شانس در فضای نمونه‌ای گسسته
- ۳ محاسبه احتمال پیشامدهای غیرهم‌شانس به کمک قوانین احتمال

## روش تدریس

شروع درس با بیان احتمال قهرمانی تیم‌های فوتبالی است که قبل از شروع جام جهانی ۲۰۱۴ به آنها اختصاص داده شده بود. بیان مثال‌های دیگری مانند احتمال بارش باران یا برف در روزهای زمستانی یک سال، ذهن دانش‌آموزان را به این مطلب سوق می‌دهد که در دنیای پیرامون آنها، به‌وفور پیشامدهای غیرهم‌شانس وجود دارند و هدف این درس، محاسبه احتمال چنین پیشامدهایی است. دقت کنید که احتمال غیرهم‌شانس فقط در فضای نمونه‌ای گسسته مطرح شده است. فعالیت نخست این درس در مورد تاسی است که وجه‌های آن اعداد ۱، ۲ و ۳ با پراکنندگی‌های مختلف هستند، بنابراین شانس مشاهده آنان یکسان نیست. حل کار در کلاس صفحه ۵۰ توسط دانش‌آموزان، می‌تواند معلم را در تشخیص اینکه مطالب درسی به درستی تفهیم شده‌اند، کمک شایانی کند.

## توصیه آموزشی

وقت خود را معطوف به حل مسائلی که در آنها پیشامدهای غیرهم‌شانس در فضای نمونه‌ای پیوسته مطرح می‌شوند، نکنید.

## حل تمرین‌های صفحه ۵۱

۱ با توجه به اینکه  $P(\text{پشت}) = \frac{1}{4}P(\text{رو})$  و  $P(\text{پشت}) + P(\text{رو}) = 1$ ، بنابراین  $P(\text{رو}) = \frac{1}{3}$

$$P(\text{پشت}) = \frac{2}{3} \text{ و}$$

۲  $P(a) = Ka$  که در آن  $1 \leq a \leq 6$ .

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow K + 2K + \dots + 6K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{21}$$

بنابراین

$$P(\{1, 2, 3\}) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} = \frac{2}{7}$$

$$P(B) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(\{a, b, c, d\}) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(\{a, b\}) + P(\{c, d\}) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7} + P(\{c, d\}) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(\{c, d\}) = \frac{11}{35} \Rightarrow P(C') = \frac{11}{35}$$

۴ اعداد  $P(x)$ ،  $P(y)$ ،  $P(z)$  یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $\frac{1}{4}$  هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} P(y) = P(x) + \frac{1}{4} \\ P(z) = P(y) + \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow P(z) = P(x) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = P(x) + \frac{1}{2}$$

از سوی دیگر  $P(x) + P(y) + P(z) = 1$  پس  $P(x) = \frac{1}{12}$

$$\text{پس } P(y) = \frac{4}{12} \text{ و } P(z) = \frac{7}{12}$$

۵ اگر  $P_K = (2k - 1)x$  احتمال اصابت دارت به ناحیه  $K$  ام باشد، با توجه به اینکه مجموع

احتمال اصابت به کل نواحی برابر با یک است، پس:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1 \Rightarrow x + 3x + 5x + 7x + 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

بنابراین

$$P_1 = \frac{1}{25}, P_2 = \frac{3}{25}, P_3 = \frac{5}{25}, P_4 = \frac{7}{25}, P_5 = \frac{9}{25}$$

(الف)

$$\begin{cases} P(\{1, 3, 4\}) = P_1 + P_3 + P_4 = \frac{1}{25} + \frac{5}{25} + \frac{7}{25} = \frac{13}{25} \\ P(\{2, 5\}) = P_2 + P_5 = \frac{3}{25} + \frac{9}{25} = \frac{12}{25} \end{cases}$$

(ب)

بنابراین احتمال اصابت دارت به ناحیه‌های اول، سوم یا چهارم بیشتر از احتمال اصابت دارت

به ناحیه دوم یا پنجم است.

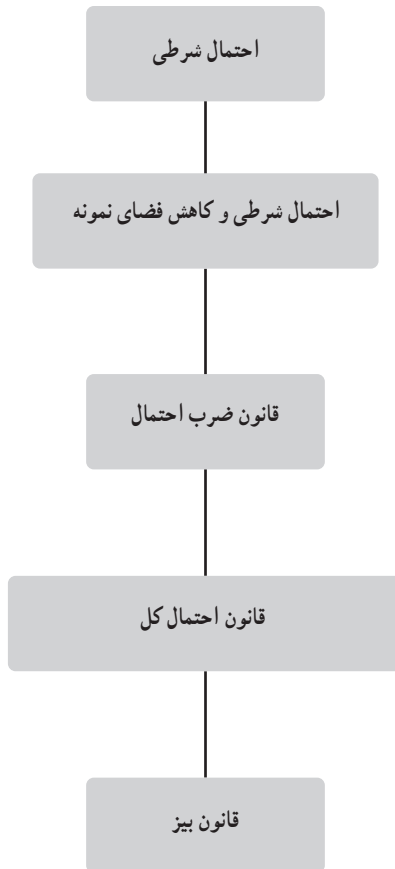
## نمونه سؤالات ارزشیابی (درس دوم)

- ۱ روی یک تاس، ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۳ و ۳ نوشته شده است. در پرتاب این تاس،  
 الف) احتمال مشاهده هر یک از اعداد ۱، ۲ و ۳ را به دست آورید.  
 ب) چقدر احتمال دارد که عددی اول دیده شود.
- ۲ در پرتاب یک تاس، احتمال روشن شدن مضارب ۳، نصف احتمال روشن شدن سایر اعداد است.  
 در یک پرتاب، چقدر احتمال دارد که عددی بزرگتر از ۴ ظاهر شود؟
- ۳ دو مرد و سه زن در یک مسابقه قرعه کشی شرکت کرده اند. احتمال برد هر زن دو برابر  
 احتمال برد هر مرد است.  
 الف) احتمال برنده شدن یک زن خاص چقدر است؟  
 ب) احتمال برنده شدن زنان چقدر است؟
- ۴ در فضای نمونه‌ای  $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ، اگر  $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{11}{16}$  و  $P(\{a_3, a_4\}) = \frac{1}{4}$  و  
 $P(a_1) = \frac{1}{4}$  و  $P(a_4) = \frac{1}{4}$  را به دست آورید.
- ۵ اگر  $S = \{a, b, c, d\}$  و  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{a, c, d\}$  دو پیشامد باشند به طوری که  $P(A) = \frac{3}{4}$   
 و  $P(B) = \frac{4}{5}$ ، حاصل  $P(C')$  را به دست آورید که  $C = \{b, d\}$ .
- ۶ در فضای نمونه‌ای  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$ ، داریم:  

$$P(x_i) = \frac{1}{i} P(x_{i+1}) \quad ; \quad 1 \leq i \leq 4$$
 مطلوب است محاسبه  $P(\{x_2, x_4\})$ .
- ۷ تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال روشن شدن هر عدد متناسب با مربع آن عدد  
 است. اگر این تاس را پرتاب کنیم، با چه احتمالی عدد روشده بین ۲ و ۶ است.

## درس سوم : احتمال شرطی

### نقشه مفهومی





## اهداف

- ۱ توانایی محاسبه احتمال شرطی (با کاهش فضای نمونه و بدون آن)
  - ۲ توانایی محاسبه احتمال وقوع دو یا سه پیشامد به طور هم‌زمان به کمک قانون ضرب احتمال
  - ۳ افراز فضای نمونه به چند قسمت و محاسبه احتمال یک پیشامد در هر قسمت به کمک قانون احتمال کل
  - ۴ رسم نمودار درختی در مسائل مربوط به قانون احتمال کل
  - ۵ درک قانون بیز و تبدیل احتمال قبل از وقوع به احتمال بعد از وقوع به کمک این قانون
- روش تدریس

اهم مطالب این درس، احتمال شرطی، قانون ضرب احتمال، قانون احتمال کل و قانون بیز است. شروع این درس با طرح یک فعالیت در صفحه ۵۲ است که می‌توانید اطلاعات موجود در شماره ۲ را در یک جدول به صورت زیر وارد کنید.

اکنون به کمک آن که به طور ضمنی فضای نمونه کاهش یافته است، به راحتی می‌توان احتمال‌های خواسته شده را به دست آورد.

	نمره کامل	نمره غیرکامل	مجموع
کلاس ۱-۱۱	۸	۲۴	۳۲
کلاس ۲-۱۱	۹	۲۴	۳۳
کلاس ۳-۱۱	۶	۲۹	۳۵
مجموع	۲۳	۷۷	۱۰۰

$$\text{الف) } (۱۰۰ \text{ عضوی ب) } \frac{۷۷}{۱۰۰}, \text{ پ) } \frac{۳۲}{۱۰۰} \text{ و ت) } \frac{۸}{۳۲} = \frac{۱}{۴}$$

برای رسیدن به یک تعریف جامع از احتمال شرطی، از رابطه  $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$  که از دستور کاهش فضای به دست آمده، صورت و مخرج سمت راست را به  $n(s)$  تقسیم می‌کنیم تا به رابطه

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

برسیم. مثال‌هایی که در صفحات ۵۴ و ۵۵ می‌آید به هر دو روش، یعنی کاهش

فضای نمونه و استفاده از فرمول اخیر، قابل حل است که همگی از فرمول اخیر استفاده کرده‌اند. کار در کلاس صفحه ۵۵ با طرح فعالیت نخست درس، در قسمت‌های الف و ب احتمال‌های شرطی را می‌پرسد که به سادگی می‌توانید به کمک جدول رسم شده آن را به دست آورید و برای پاسخ به قسمت پ، از قسمت الف استفاده می‌کنیم و کلاس ۱-۱۱ موفق‌تر از کلاس‌های دیگر است، قسمت ب نسبت افراد موفق هر کلاس را به تعداد کل افراد موفق نشان می‌دهد.

قانون ضرب احتمال برای دو پیشامد به صورت  $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ ، در صفحه ۵۶ مطرح می‌شود. از این قانون برای محاسبه احتمال وقوع هم‌زمان دو پیشامد استفاده می‌کنیم که به صورت متوالی رخ داده‌اند. اگر پیشامد  $B$  بعد از پیشامد  $A$  رخ دهد، برای محاسبه احتمال وقوع هم‌زمان آنها یعنی  $A \cap B$ ، از این قانون استفاده می‌کنیم.

به‌طور مشابه اگر  $A_3$  بعد از  $A_2$  و  $A_2$  بعد از  $A_1$  رخ دهند، برای محاسبه  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$  از دستور زیر استفاده می‌کنیم.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

اثبات این تساوی در تمرین‌های پایانی خواسته شده که بهتر است عبارت‌های سمت راست را ساده کنیم تا به عبارت سمت چپ برسیم. مثالی از این قسمت در اولین کار در کلاس صفحه ۵۷ آمده است و در ادامه، دومین کار در کلاس مثال دیگری از محاسبه احتمال وقوع سه پیشامد است که به‌طور متوالی رخ می‌دهند. تمرین پانزدهم از این درس شبیه آخرین مثال این بخش در صفحه ۵۸ است.

سومین بخش از این درس قانون احتمال کل است. در محاسبه  $P(A)$  اگر مطمئن نباشیم که  $A$  دقیقاً در کدام قسمت فضای نمونه است، فضای نمونه  $S$  را به مجموعه‌های  $B_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) افزایش می‌دهیم و احتمال وقوع  $A$  را در هر کدام از آنها تعیین می‌کنیم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

کشف این قانون از فعالیت صفحه ۵۸ است و در ادامه رسم نمودار درختی می‌تواند شهود مناسبی برای جواب این فعالیت و مسائل مشابه باشد.

ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل هنگامی است که فضای نمونه  $S$  بر  $B$  و  $B'$  افزایش شود:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

و این رابطه به همراه مثال آن در صفحه ۶۰ آمده است. تمرینات ۹-۶ و ۱۱ از این درس

مربوطه به قانون احتمال کل است.

قاعده بیز آخرین بخش از این درس است. این قانون مشخص می کند که چگونه می توان

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

«احتمال قبل از مشاهده» را به «احتمال پس از مشاهده» تبدیل کرد :

معمولاً استفاده از این رابطه برای تعیین  $P(A|B)$  هنگامی توصیه می شود که محاسبه  $P(B|A)$  به سادگی انجام شود. معمولاً تعیین  $P(B)$  در مخرج کسر به کمک قانون احتمال کل است و رسم نمودار درختی در مسائل مربوط به این قانون می تواند در بعضی مواقع مفید باشد. تمرینات ۱۰، ۱۵، ۱۷، ۱۸ و ۱۹ مربوط به این قانون هستند.

### حل تمرین

۱ با وجود حداقل یک فرزند پسر، تعداد فضای نمونه که از روش کاهشی به دست آمده، عبارت است از :  $n(s) = 2^4 - 1 = 15$ ، بنابراین احتمال اینکه دقیقاً ۲ فرزند پسر در این خانواده باشد، عبارت است از :

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۲ الف) اگر  $A$  پیشامد مردودی و  $S$  فضای نمونه شامل کل مراجعه کنندگان باشد،

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{258}{870} = \frac{43}{145}$$

$$P(B) = \frac{26}{79} \quad \text{ب)}$$

پ) اگر  $A$  پیشامد مردودی و  $B$  پیشامد مراجعه به مرکز شماره ۵ باشد، داریم :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{13} \times \frac{26}{79}}{\frac{43}{145}} = \frac{13}{129}$$

به روش کاهش فضای نمونه نیز می توان مسئله را حل کرد.

۳ اگر  $B_1$  و  $B_2$  به ترتیب پیشامدهای طوفانی بودن در روزهای اول و دوم باشند، سپس :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) = 0/1 \times 0/5 = 0/5$$

۴ سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم تا به سمت چپ برسیم.

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

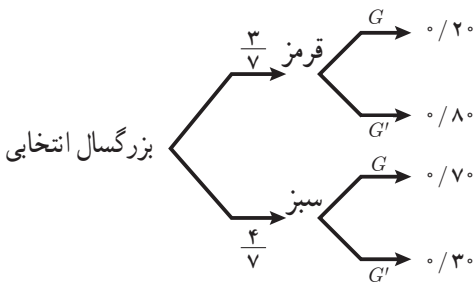
۵ یکی از روش‌ها به صورت زیر است:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

بسته به انتخاب پیشامدهای موردنظر در سمت راست تساوی بالا، تعداد روش‌هایی که

می‌توان سمت چپ را باز کرد، عبارت است از:

$$n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$



۶ اگر  $W, M, G$  و به ترتیب پیشامدهای

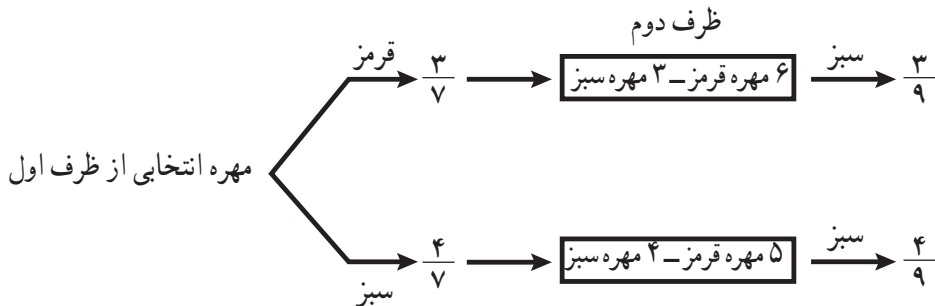
مرد، زن و داشتن گواهینامه تراکتور باشند، با

توجه به نمودار درختی مقابل و قانون احتمال کل

داریم:

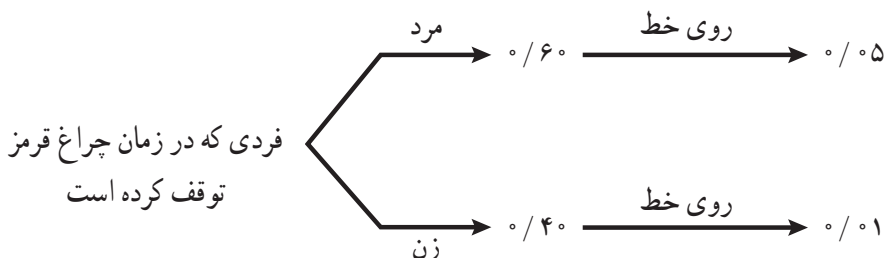
$$P(G) = P(W)P(G|W) + P(M)P(G|M) = 0.55 \times 0.2 + 0.45 \times 0.7 = 0.425$$

۷ از نمودار درختی زیر استفاده کرده و احتمال خواسته شده را به دست می‌آوریم.



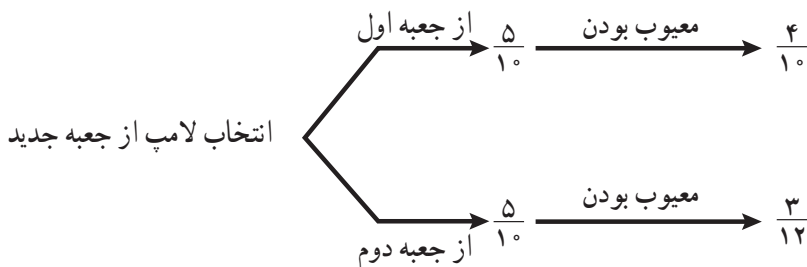
$$P(\text{سبز}) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{9} + \frac{4}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{25}{63}$$

۸ از نمودار درختی زیر استفاده کرده و احتمال خواسته شده را به دست می آوریم.



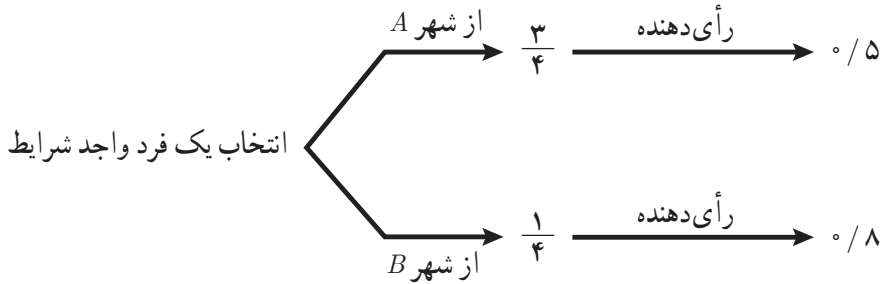
$$P(\text{روی خط توقف کردن}) = 0.6 \times 0.5 + 0.4 \times 0.1 = 0.34$$

۹ به کمک نمودار درختی زیر، مسئله را حل می کنیم.



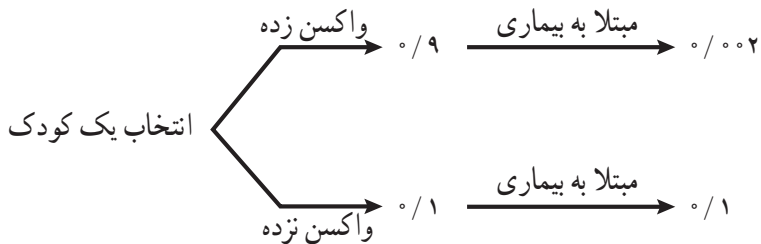
$$P(\text{معیوب بودن}) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{12} = 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.25 = 0.325$$

۱۰ اگر  $n(S)$  تعداد کل واجدین شرایط و  $n(A)$  و  $n(B)$  به ترتیب تعداد واجدین شرایط از شهرهای  $A$  و  $B$  باشند، سپس  $n(A) = 3n(B)$  و با توجه به اینکه  $n(A) + n(B) = n(S)$ ، سپس  $n(A) = \frac{3}{4}n(S)$  و  $n(B) = \frac{1}{4}n(S)$ ، بنابراین احتمال اینکه فرد انتخاب شده از شهر  $A$  و  $B$  باشد، به ترتیب  $\frac{3}{4}$  و  $\frac{1}{4}$  است. احتمال خواسته شده (رأی دهنده | از شهر  $A$ )  $P(A)$  است و چون محاسبه (از شهر  $A$  | رأی دهنده)  $P$  به راحتی قابل محاسبه است، از قاعده بیز استفاده می کنیم. برای تعیین (رأی دهنده)  $P$  از نمودار درختی زیر استفاده می کنیم.



$$P(\text{رای دهنده} | \text{از شهر A}) = \frac{P(\text{از شهر A}) P(\text{رای دهنده} | \text{از شهر A})}{P(\text{رای دهنده})} = \frac{\frac{3}{4} \times 0/5}{\frac{3}{4} \times 0/5 + \frac{1}{4} \times 0/8} = 0/65$$

۱۱ به کمک نمودار درختی زیر، احتمال خواسته شده را پیدا می کنیم.



$$P(\text{مبتلا به بیماری}) = 0/9 \times 0/002 + 0/1 \times 0/1 = 0/0018 + 0/1 = 0/118$$

۱۲ سمت راست و سمت چپ را از تعریف احتمال شرطی بازمی کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(B_i | A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} \\ \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \times \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)}}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \end{array} \right.$$

$$\therefore P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} \quad \text{بنابراین}$$

۱۳ فرض کنیم ماکزیمم و مینیمم مجموعه  $\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\}$  به ترتیب  $P(A|B_s)$  و  $P(A|B_t)$  باشند، از قانون احتمال کل برای محاسبه  $P(A)$  شروع کرده و مسئله را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) \\ &\leq P(B_1)P(A|B_s) + \dots + P(B_n)P(A|B_s) \\ &= P(A|B_s)(P(B_1) + \dots + P(B_n)) \\ &= P(A|B_s) \times 1 \\ &= P(A|B_s) \end{aligned}$$

بنابراین  $P(A) \leq P(A|B_s)$ . مشابهاً با تغییر  $P(A|B_s)$  به  $P(A|B_t)$  و  $\leq$  با  $\geq$  نامساوی حاصل می‌شود.

۱۴ از قبل می‌دانیم که اگر  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ ، سپس  $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$ . به کمک این خاصیت داریم:

$$P(A|B) \leq P(A|C) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(B) + P(C)} \leq \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

$$\xrightarrow{B \text{ و } C \text{ ناسازگار}} P(A|B) \leq \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B \cup C)} \leq P(A|C) \Rightarrow P(A|B) \leq \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} \leq P(A|C)$$

$$\Rightarrow P(A|B) \leq P(A|B \cup C) \leq P(A|C)$$

۱۵ اگر  $A$  پیشامد امیر بلندقدترین عضو تیم و  $B$  پیشامد این باشد که امیر از بابک قدبلندتر است، باید  $P(A|B)$  را به دست آوریم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

اکنون اگر  $C$  پیشامد این باشد که امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد، باید  $P(C|B)$  را به دست آوریم.

$$P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{P(C)P(B|C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{45}$$

۱۶ اگر  $A$  و  $B$  پیشامدهای به ورزشگاه رفتن علی و مازیار باشد، سپس  $P(A) = 0/4$ ،  $P(B) = 0/3$  و  $P(B|A) = 0/08$  باید  $P(B'|A')$  را به دست آوریم.

$$P(B|A) = 0/08 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0/08 \Rightarrow P(A \cap B) = 0/4 \times 0/08 = 0/032$$

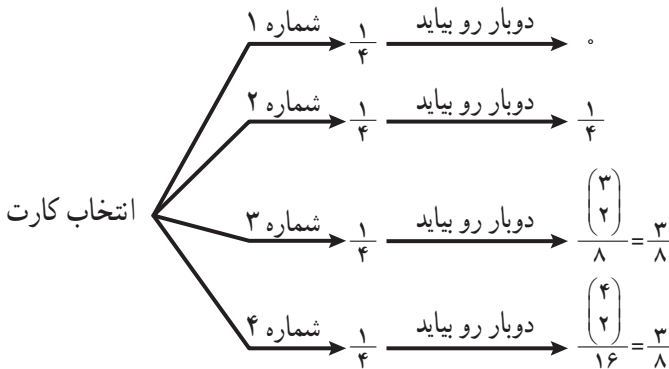
$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - (0/4 + 0/3 - 0/032)}{0/6} = 0/55$$

۱۷ اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  به ترتیب پیشامدهای نسخه خوانی خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی باشد و  $F$  پیشامد بی غلط تصحیح کردن صفحات باشد، باید  $P(A|F')$  را به دست آوریم. برای این کار از قانون بیز استفاده می‌کنیم. برای تعیین  $P(F')$  نیز از قانون احتمال کل استفاده شده است.

$$P(A|F') = \frac{P(A)P(F'|A)}{P(F')} = \frac{0/2 \times 0/1}{0/2 \times 0/1 + 0/3 \times 0/05 + 0/5 \times 0/01} = 0/5$$

۱۸ باید (۲ بار رو بیاید | شماره کارت ۳ باشد)  $P$  را محاسبه کنیم. از قانون بیز و نمودار درختی زیر استفاده می‌کنیم.



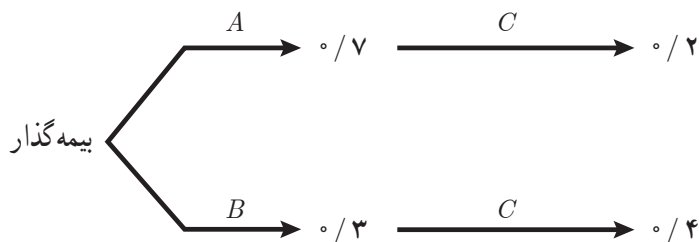
بنابراین:

$$P(\text{شماره کارت ۳ باشد} | \text{۲ بار رو بیاید}) = \frac{P(\text{شماره کارت ۳ باشد}) P(\text{۲ بار رو بیاید} | \text{شماره کارت ۳ باشد})}{P(\text{۲ بار رو بیاید})}$$



$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8}} = \frac{3}{8}$$

۱۹ اگر  $A$  و  $B$  پیشامد بیمه گذاران کم خطر و پرخطر باشد، سپس  $P(A) = 0/7$  و  $P(B) = 0/3$  اکنون اگر  $C$  پیشامد تصادف کردن باشد،  
الف) به کمک نمودار درختی زیر،  $P(C)$  را به دست آوریم.



$$P(C) = 0/7 \times 0/2 + 0/3 \times 0/4 = 0/26$$

ب) برای محاسبه  $P(B|C)$  از قانون بیز استفاده می کنیم.

$$P(B|C) = \frac{P(B)P(C|B)}{P(C)} = \frac{0/3 \times 0/4}{0/26} = \frac{0/12}{0/26} = \frac{6}{13}$$

## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ در یک کلاس ۶۰٪ دانش‌آموزان در درس فیزیک، ۵۰٪ در درس ریاضی و ۴۰٪ در هر دو درس نمره کامل دریافت کرده‌اند. اگر یک دانش‌آموز که نمره کامل فیزیک را کسب کرده به طور تصادفی انتخاب کنیم، با چه احتمالی در درس ریاضی نیز نمره کامل را گرفته است؟

۲ اگر در پرتاب دو تاس اعداد رو شده متفاوت باشند، احتمال آنکه متوالی باشند، کدام است؟

۳ اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه  $S$  باشند و  $P(A|B) = \frac{2}{5}$  و  $P(B-A) = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $P(B)$  را به دست آورید.

۴ در یک جعبه ۴ کارت وجود دارد که دوروی کارت اول، آبی، دو روی کارت دوم قرمز، دوروی کارت سوم، قرمز و آبی و دوروی کارت چهارم، سبز و آبی است. یک کارت به تصادف برمی‌داریم. اگر یک روی این کارت قرمز باشد، احتمال اینکه وجه دیگر کارت، آبی باشد، چقدر است؟

۵ از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت قرمز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جای گذاری بیرون می‌آوریم. سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال:

(الف) کارت اول سفید و کارت دوم قرمز است.

(ب) هر دو کارت قرمز هستند.

(پ) هر دو کارت هم‌رنگ هستند.

۶ در یک گروه ۶ نفر حضور دارند که دوفنر آنها در سال ۱۳۵۹، دوفنر دیگر در سال ۱۳۶۰ و دوفنر آخر در سال ۱۳۶۳ به دنیا آمده‌اند. سه نفر از این گروه به ترتیب انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

(الف) سن آنها از بزرگ به کوچک باشد.

(ب) سن آنها مرتب باشد.

۷ صبا در هریک از آزمون‌های فیزیک و ریاضی، ۸۰٪ توانایی کسب نمره کامل را دارد ولی اگر نتواند نمره کامل را در یکی از آنها بگیرد، توانایی او برای کسب نمره کامل در درس بعدی

به ۶۰٪ کاهش می یابد. مطلوب است احتمال اینکه :

(الف) در هر دو درس نمره کامل را کسب کند.

(ب) فقط در یک درس نمره کامل بگیرد.

(پ) در هیچ امتحانی نمره کامل را نگیرد.

۸ از ظرف  $I$  که شامل ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است، مهره‌ای به ظرف  $II$  که در آن ۴

مهره سفید و ۶ مهره سیاه است، منتقل می کنیم و سپس از ظرف  $II$  یک مهره خارج می کنیم. احتمال آنکه این مهره سفید باشد، چقدر است؟

۹ در دو جعبه به ترتیب  $3^\circ$  و  $2^\circ$  لامپ وجود دارد. در جعبه اول ۵ لامپ معیوب و در جعبه

دوم ۳ لامپ معیوب قرار دارد. از اولی  $1^\circ$  و از دومی ۸ لامپ به تصادف خارج می کنیم و آنها را در جعبه‌ای جدید قرار می دهیم و سپس از جعبه جدید یک لامپ به تصادف خارج می کنیم. احتمال معیوب بودن آن را به دست آورید.

۱۰ میزان مشارکت ۳ شهر  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  از یک استان در انتخابات،  $70\%$ ،  $60\%$  و  $80\%$  است.

اگر جمعیت این سه شهر به ترتیب  $\frac{1}{5}$ ،  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  جمعیت استان را تشکیل دهند و فردی به تصادف از این سه شهر انتخاب شود، با چه احتمالی این فرد در انتخابات شرکت کرده است؟

۱۱ یک تاس را آن قدر پرتاب می کنیم تا برای اولین بار، عدد ظاهر شده مضرب ۳ شود. با

چه احتمالی :

(الف) در پرتاب دوم این نتیجه حاصل می شود.

(ب) حداکثر در پرتاب دوم این نتیجه حاصل می شود.

۱۲ فردی در یک دادگاه محاکمه می شود. اگر احتمال خطای قاضی  $1^\circ$  و احتمال آنکه

این فرد مجرم باشد،  $3^\circ$  باشد و قاضی حکم به بی گناهی این فرد دهد، احتمال اینکه این فرد واقعاً بی گناه باشد، چقدر است؟

۱۳ در جعبه  $I$ ، ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه و در جعبه  $II$ ، ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود

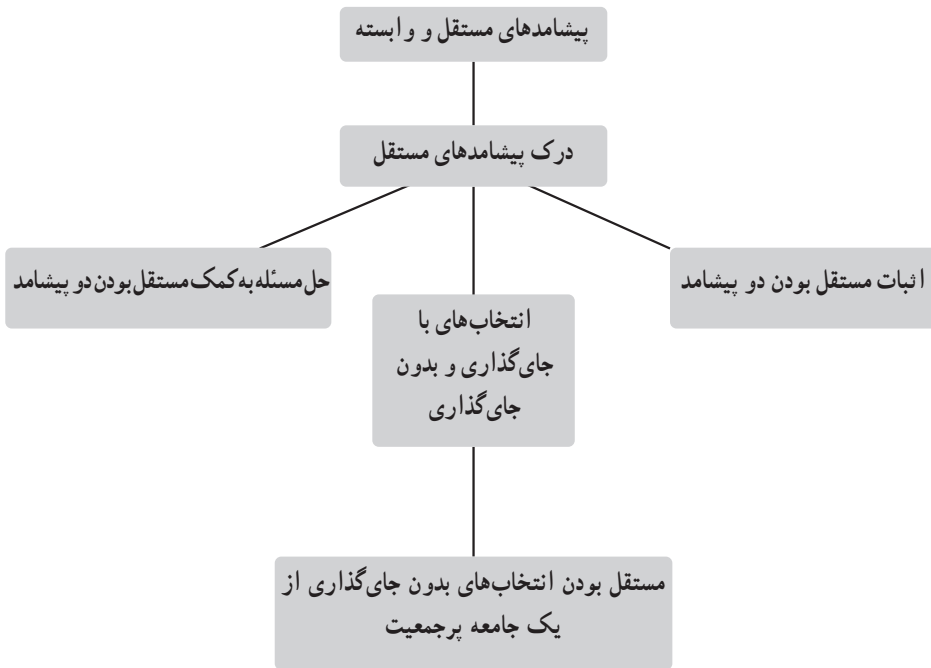
است. تاسی را پرتاب می کنیم، اگر شماره‌های ۱ یا ۲ بیاید از جعبه  $I$  و در غیر این صورت یک مهره از جعبه  $II$  خارج می کنیم. اگر رنگ مهره مشاهده شده سفید باشد، احتمال آنکه این مهره از جعبه  $I$  باشد، کدام است؟

۱۴ در یک آزمون، از دانش‌آموزان دو کلاس  $A$  و  $B$  به ترتیب از هر کدام،  $۶۰\%$  و  $۸۰\%$  درصد نمره کامل را کسب کرده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزان کلاس  $A$ ،  $\frac{3}{4}$  تعداد دانش‌آموزان کلاس  $B$  باشد و فردی به تصادف از بین افرادی که نمره کامل را کسب کرده‌اند، انتخاب کنیم. با کدام احتمال این فرد از کلاس  $A$  است؟

۱۵ خانواده‌ای دارای یک فرزند است و از جنسیت آن فرزند اطلاعی نداریم. یک فرزند پسر به این خانواده اضافه می‌شود. اگر یکی از فرزندان این خانواده انتخاب و این فرزند، پسر باشد، با کدام احتمال، فرزند اول نیز پسر است؟

## درس چهارم : پیشامدهای مستقل و وابسته

### نقشه مفهومی



## اهداف

- ۱ توانایی بررسی مستقل یا وابسته بودن دو یا چند پیشامد
- ۲ شناخت مستقل یا وابسته بودن بعضی از پیشامدها بدون بررسی علمی
- ۳ استفاده از مستقل بودن پیشامدها در حل مسائل
- ۴ محاسبه احتمال در انتخاب‌های با جایگزینی
- ۵ محاسبه احتمال در انتخاب‌های بدون جایگزینی
- ۶ مستقل گرفتن پیشامدها در انتخاب‌های بدون جایگزینی از یک جامعه پرجمعیت

## روش تدریس

مفهوم مستقل بودن را به سادگی می‌توانید با مثال‌های متنوعی از جمله پرتاب دو سکه به راحتی به دانش‌آموز انتقال دهید. فعالیت نخست این درس برای کشف رابطه  $P(A|B) = P(A)$  و سپس نتیجه‌گیری  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  برای پیشامدهای  $A$  و  $B$  ای هست که مستقل از یکدیگرند. هر دو رابطه مستقل بودن  $A$  و  $B$  را بیان می‌کنند؛ ولی در رابطه نخست، نیاز است که  $P(A)$  و  $P(B)$  صفر نباشند. استقلال دو پیشامد همیشه به سادگی دیده نمی‌شود. مثال ۱ برای این مورد آمده است و مثال ۲ برای کاربرد این مفهوم در حل مسائل مطرح شده است. کار در کلاس شماره‌های ۱ و ۲ در راستای کشف مستقل بودن دو پیشامد و کار در کلاس شماره ۳ در راستای مثال ۲ مطرح شده است.

در بخش دوم این درس، انتخاب‌های با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری مطرح می‌شوند. مثال ۳ برای انتخاب‌های بدون جای‌گذاری است و نشان می‌دهد که این انتخاب‌ها معمولاً مستقل نیستند. کار در کلاس صفحه ۷۰، همین مسئله را در حالتی مطرح می‌کند که انتخاب‌ها با جای‌گذاری انجام شده‌اند و در ادامه مستقل بودن آنها را در حالت کلی نتیجه می‌گیرد.

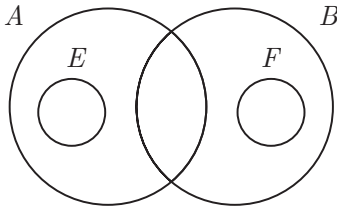
در بسیاری از مسائل بیش از دو پیشامد مستقل مطرح می‌شوند، بنابراین لازم است مفهوم استقلال برای سه پیشامد و در حالت کلی مطرح شود. مثال ۴ به همین جهت مطرح و حل شده است. آخرین مثال این درس برای این مطلب است که نشان دهد انتخاب‌های بدون جای‌گذاری از یک جامعه پرجمعیت را می‌توانیم مستقل در نظر بگیریم. برای فهم دقیق‌تر این مطلب از این مثال، جمعیت شهر را ۱۰۰ هزار نفر در نظر بگیرید، بنابراین ۸۰ هزار نفر از مردمان این شهر با سواد و

۲۰ هزار نفر بی سوادند. احتمال هر پنج نفری سواد را مطابق زیر از قانون ضرب احتمال ها به دست آورید تا نشان دهید که انتخاب های بدون جای گذاری با انتخاب های با جای گذاری تفاوت بسیار کمی دارند، (کمتر از  $10^{-5}$ ).

$$P(\text{هر پنج نفر بی سواد}) = \frac{20000}{100000} \times \frac{19999}{99999} \times \dots \times \frac{19996}{99996} \approx 0.000031$$

### حل تمرین های صفحه ۷۱

- ۱ خیر، اگر  $A$  و  $B$  ناتهی باشند،  $P(A)$  و  $P(B)$  مخالف صفر هستند و چون ناسازگارند،  $P(A \cap B) = 0$ ، بنابراین  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ ، پس  $A$  و  $B$  مستقل نیستند.
- ۲ خیر، با توجه به شکل مقابل،  $E$  و  $F$  دو پیشامد ناتهی و ناسازگارند و طبق تمرین ۱ نمی توانند مستقل باشند.



۳ الف) باید نشان دهیم  $P(A' \cap B) = P(A')P(B)$ .

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B)$$

$$= P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A')$$

ب) باید نشان دهیم  $P(A' \cap B') = P(A')P(B')$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A))$$

$$= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A')P(B')$$

۴ در این مسئله،

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$$

$$B = \{(3, 1), (3, 2), \dots, (3, 6)\}$$

بنابراین  $A \cap B = \{(3, 2), (3, 4)\}$  . با توجه به اینکه

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

بنابراین  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$  ، پس  $A$  و  $B$  مستقل نیستند.

۵ در این مسئله،

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad \text{و} \quad B = \{3, 6, 9\} \quad \text{و} \quad A \cap B = \{6\}$$

با توجه به اینکه

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad \text{و} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

بنابراین  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$  ، پس  $A$  و  $B$  مستقل نیستند.

۶ در این مسئله  $P(A) = \frac{1}{6}$  ،  $P(B) = \frac{1}{8}$  و با توجه به مستقل بودن این دو پیشامد، داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{48} \quad \text{الف)}$$

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B') = \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{48} \quad \text{ب)}$$

$$P(A' \cap B) = P(A')P(B) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{48} \quad \text{پ)}$$

۷ با توجه به مستقل بودن پرتاب سکه با پرتاب دو تاس، داریم:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$



۸ با فرض اینکه پاسخ دادن به سؤالات مختلف، مستقل از یکدیگر است، داریم :

(الف)

$$P(A) = \frac{1}{5} \times \dots \times \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

(ب)

$$P(B) = \frac{1}{5} \times \dots \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{4}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

(پ)

$$P(C) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

۹ انتخاب مهره‌ها با جای گذاری است، پس مستقل از یکدیگرند، بنابراین

(الف)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

(ب)

$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

(پ)  $P(D) = P(\text{دو مهره قرمز یا دو مهره آبی}) = P(\text{دو مهره آبی}) + P(\text{دو مهره قرمز})$

$$= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$$

۱۰ (الف)

$$P(A) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10}$$

(ب)

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10}$$

۱۱ انتخاب افراد از یک جامعه پر جمعیت صورت می‌گیرد، پس آنها را مستقل می‌گیریم و داریم :

$$P(A) = \frac{1}{10} \times \dots \times \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$$

۱۲ با توجه به اینکه  $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ ، پس  $P(A) - 0/04 = 0/08$ ، بنابراین  $P(A) = 0/12$  همچنین  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ، پس  $0/12 = 0/14 \times P(B)$  و  $P(B) = 0/071$  به دست می‌آید. بنابراین:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = 0/12 + 0/29 - 0/04 = 0/37$$

### نمونه سوالات ارزشیابی (درس چهارم)

- ۱ اگر  $A$  و  $B$  پیشامدهای مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل اند.  
الف)  $A$  و  $B'$   
ب)  $A'$  و  $B'$
- ۲ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.  
الف) اگر  $A$  و  $B$  ناسازگار باشند، آنگاه  $A$  و  $B$  وابسته اند.  
ب) اگر  $A$  و  $B$  مستقل باشند، آنگاه  $A$  و  $B$  ناسازگارند.
- ۳ محسن تصور می‌کند که اگر در پرتاب‌های زیاد یک سکه، همگی رو دیده شود، در پرتاب بعدی احتمال پشت دیده شدن، بیشتر از رو است. آیا با تصور محسن موافق هستید؟ چرا؟
- ۴ دو تاس به طور هم‌زمان پرتاب می‌شوند، اگر  $A$  پیشامد این باشد که تاس اول ۳ بیاید و  $B$  پیشامد مجموع دو تاس ۵ و  $C$  مجموع دو تاس ۷، آیا  $A$  و  $B$  مستقل اند؟  $A$  و  $C$  چگونه؟
- ۵ در یک آزمایش، عددی به تصادف را از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 100\}$  انتخاب می‌کنیم. فرض کنید  $A$ ،  $B$  و  $C$  به ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیری عدد انتخاب شده بر ۲، ۳ و ۵ باشند، نشان دهید که:  
الف)  $A$  و  $B$  وابسته اند.  
ب)  $A$  و  $C$  مستقل اند.
- ۶ یک عقربه حول مرکز یک دایره که محیط آن به سه ناحیه  $A$ ،  $B$  و  $C$  تقسیم شده است، می‌تواند بچرخد. در یک بازی، عقربه را چرخانده و بسته به اینکه عقربه در ناحیه  $A$ ،  $B$  یا  $C$  توقف

کند، اعداد ۱، ۲ یا ۳ به بازیکن تعلق می‌گیرد. اگر دوبار عقربه را بچرخانیم و  $E$ ،  $F$  و  $G$  به ترتیب پیشامدهای تعلق عدد ۱ در چرخش اول، مجموع ۳ در دوبار چرخش و مجموع ۴ در دوبار چرخش باشند، نشان دهید که

(الف)  $E$  و  $G$  مستقل اند.

(ب)  $E$  و  $F$  وابسته اند.

۷ ظرف I شامل ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه و ظرف II شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. از هر جعبه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر  $A$  پیشامد هم‌رنگ بودن دو مهره و  $B$  پیشامد سفیدبودن حداقل یک مهره باشد، آیا  $A$  و  $B$  مستقل اند؟

۸ دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه در پرتاب اول مضرب ۳ و در پرتاب دوم مضرب غیر ۳ دیده شود، چقدر است؟

۹ خانواده‌ای دارای چهار فرزند است و می‌دانیم که دو فرزند آخر آنها دختر است. احتمال آنکه دو فرزند اول آنها نیز دختر باشند، چقدر است؟

۱۰ اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل باشند و  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(B-A) = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $P(B)$  را به دست آورید.

۱۱ دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقل از یکدیگرند و  $P(A-B) = \frac{1}{4}$  و  $P(B-A) = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $P(A \cap B)$  را به دست آورید.

۱۲ اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل باشند و  $P(B-A) = \frac{1}{5}$  و  $P(A|B) = \frac{1}{3}$ ، حاصل  $P(A \cup B)$  را به دست آورید.

۱۳ خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است. احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

(الف) هر پنج فرزند، پسر باشند.

(ب) دقیقاً یک فرزند، پسر باشد.

(ج) فرزند اول و آخر پسر باشند.

(د) حداقل دو فرزند پسر باشند.

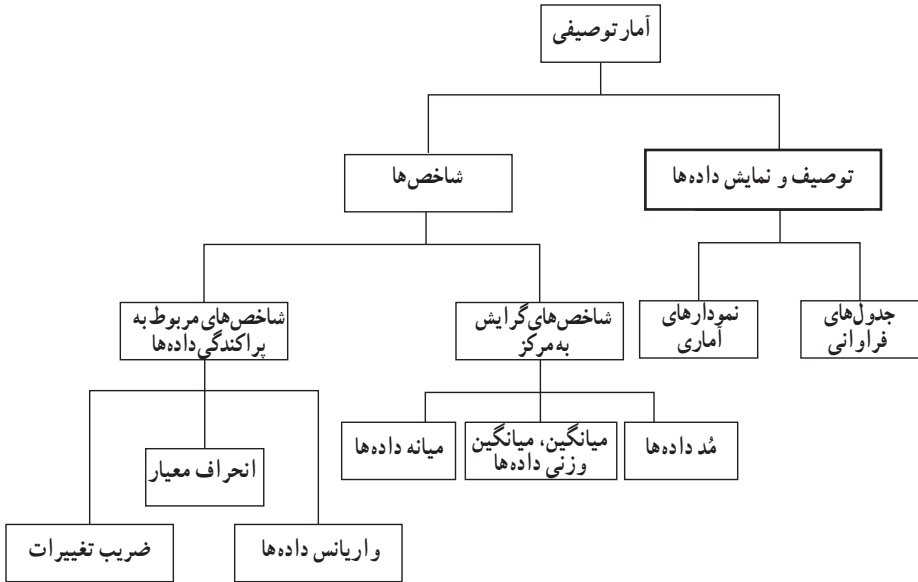
۱۴ در یک فروشگاه بزرگ، مشاهده شده است که تقریباً ۲۵٪ افراد داخل فروشگاه خرید می‌کنند. اگر در یک زمان معین، ۵ نفر داخل فروشگاه باشند، مطلوب است احتمال اینکه،

- الف) هر پنج نفر خرید کنند.
- ب) دقیقاً یک نفر از آنها خرید کند.
- ج) یک یا دو نفر خرید کنند.
- ۱۵) ۲۰ درصد مردم شهری روزنامه مطالعه می کنند. ۴ نفر را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.
- الف) هر چهار نفر روزنامه مطالعه کنند.
- ب) دقیقاً ۳ نفر روزنامه مطالعه کنند.
- ج) حداکثر یک نفر روزنامه مطالعه کند.

## فصل سوم

### آمار توصیفی

## نقشه مفهومی فصل سوم



## نگاه کلی به فصل

در این فصل که شامل سه درس است به موضوع آمار توصیفی پرداخته شده است. دانش‌آموزان با موضوع آمار توصیفی از کلاس دوم دبستان آشنایی داشته و بعضی مفاهیم آمار توصیفی را یاد گرفته‌اند در مواردی همچون دسته‌بندی داده‌های آماری و رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای مطالبی را یاد گرفته‌اند. همچنین آنها در سال ششم و هفتم با رده‌بندی کردن داده‌ها و رسم نمودار بافت نگاشت آشنا شده‌اند و در سال هشتم با مفهوم فراوانی در جدول‌های فراوانی مطالبی را خوانده‌اند. در همین سال با میانگین داده‌ها و نحوه محاسبه آن مطالبی را فرا گرفته‌اند. در سال دهم با مفهوم آمار، علم آمار و همچنین کاربردهای علم آمار آشنا شده و مفاهیم متغیرها و انواع آنها را آموخته‌اند با مفهوم جامعه، نمونه، حجم جامعه و حجم نمونه و غیره آشنا شده و اصطلاحات آماری را در جهت بالابردن سواد آماری فرا گرفته‌اند.

اما در کتاب آمار و احتمال سال یازدهم در فصل سوم، مطالب تکمیلی از آمار توصیفی را می‌آموزند.

در درس اول این فصل، که جنبه یادآوری برای دانش‌آموزان را نیز دارد با مفهوم فراوانی نسبی در جدول‌های آماری (جدول‌های فراوانی) آشنا می‌شوند. و درس دوم شاخص‌های گرایش به مرکز بیان می‌گردد که در این درس میانگین موزن داده‌ها مطلب جدیدی است که دانش‌آموزان آن را فرا می‌گیرند. همچنین مفهوم چارک اول و چارک سوم به همراه میانه داده‌ها بیان می‌شود، مد داده‌ها به عنوان آخرین شاخص گرایش به مرکز برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود در پایان این درس نکته حائز اهمیت استفاده این سه شاخص گرایش (میانگین، میانه و مد) در کاربردهای روزمره زندگی است. دانش‌آموز می‌آموزد که این سه شاخص در همه حال می‌بایست مورد محاسبه قرار دهد ولی با توجه به هدفی که دنبال می‌کند می‌تواند حداقل یکی از این شاخص‌ها را مورد استفاده قرار دهد. در این قسمت مثال‌های متنوعی بیان شده است. در درس سوم علاوه بر یادآوری شاخص گرایش به پراکندگی انحراف معیار و واریانس داده‌ها شاخص ضریب تغییرات داده‌ها به عنوان مطلب جدید در این فصل معرفی می‌گردد. دانش‌آموزان با نمودار جعبه‌ای و کاربردهای آن آشنا می‌شوند.

## دانستنی‌هایی برای معلم

نکته حائز اهمیت در این فصل، آن است که دانش‌آموز علاوه بر فراگیری رسم نمودارها، به توانایی تحلیل نمودارهای آماری برسد و همچنین کاربردهای علم آمار را که در این فصل به‌عنوان خواندنی مطرح شده است به‌خوبی بیاموزد. این کاربردهای هوشمندانه در این فصل قرار داده شده است. به‌ویژه کاربرد علم آمار در تفسیر تصاویر مغزی را می‌توان اشاره نمود. دانش‌آموز با معدل گرفتن از دو شکل می‌تواند به شکل جدیدی برسد. همچنین در تمرین‌های این فصل (تمرین ۷، صفحه ۸۲) یک بیت شعر آمده است دانش‌آموز یاد می‌گیرد که می‌تواند برای یک بیت شعر تولید داده و به توصیف و نمایشی آن اعداد پردازد.

سعی شده است تصویر شاداب و خلاقانه‌ای از آمار توصیفی در این فصل ارائه شود. ذهن دانش‌آموز، با اعداد و ارقام خسته نمی‌شود و با استفاده در تکنیک‌های اینفوگرافی سعی شده است دانش‌آموز اعداد و ارقام را در قالب تصاویر حس کند.

## منابع

- ۱ آمار و احتمال مهندسی / نادر نعمت‌الهی / ققنوس
- ۲ آمار و احتمال مقدماتی / مجتبی گنجعلی و احسان بهرامی سامانی / نگارنده دانش
- ۳ آمار و احتمال مقدماتی / جواد بهبودیان / دانشگاه امام رضا
- ۴ آمار مقدماتی / رونالدوناکات - وناکات / ترجمه محمدرضا شکانی / مرکز نشر دانشگاهی



## درس اول : توصیف و نمایش داده‌ها

### اهداف

- ۱ یادآوری و تکمیل مفاهیم مربوط به توصیف و نمایش داده‌ها
- ۲ یادآوری دانش آموزان با رسم نمودارهای آماری مانند نمودار میله‌ای و نمودار دایره‌ای برای متغیرهای گسسته و نمودار بافت نگاشت برای متغیر پیوسته
- ۳ آشنا شدن دانش آموزان با تحلیل نمودارهای آماری
- ۴ آشنا شدن دانش آموزان با مفهوم فراوانی نسبی داده‌ها

### روش تدریس

این درس با یادآوری مفاهیم مربوط به آمار توصیفی مانند توصیف و نمایش داده‌ها آغاز می‌شود. اولین فعالیت در صفحه ۷۴ فعالیت مربوط به یک راننده تاکسی است که می‌خواهد اسکناس‌های کیف خود را دسته‌بندی کند. از آنجایی که تعداد اسکناس‌ها یک متغیر گسسته است و همچنین با ایجاد یک اینفوگرافی از اسکناس‌ها، دانش‌آموز وادار می‌شود که اسکناس‌ها را بشمرد. برای دسته‌بندی اسکناس‌ها در این فعالیت قدم به قدم کارهایی از دانش‌آموز خواسته می‌شود. دانش‌آموز در مرحله سوم این فعالیت تعداد هر اسکناس را بر تعداد کل اسکناس‌ها تقسیم می‌کند؛ در واقع با این کار به صورت ناخودآگاه فراوانی نسبی هر اسکناس را محاسبه می‌نماید. ادامه این فعالیت به دلیل گسسته بودن متغیر تعداد اسکناس‌ها، نمودار میله‌ای اسکناس‌ها توسط دانش‌آموز با قرار دادن ۲ و ۱۰ به عنوان اسکناس‌های ۲ هزار تومانی و ۱۰ هزار تومانی روی هم، تکمیل می‌گردد. همچنین نمودار مربوط به فراوانی نسبی تعداد اسکناس‌ها نیز کامل می‌شود. در ادامه این فعالیت در صفحه ۷۶، قسمت ۳، به دنبال تحلیل نمودارهای رسم شده هستیم. دانش‌آموز می‌بایست تحلیل کردن این نمودارها را بیاموزد. در قسمت ۴، نمودار دایره‌ای و نحوه رسم آن مرور گردیده است. در کادر این صفحه مفاهیم داده‌ها، متغیر، مقدار متغیر و فراوانی داده‌ها یادآوری شده است و مفهوم جدید فراوانی نسبی یک داده و درصد داده بیان می‌شود.

در کار در کلاس این صفحه، مطالب با اینفوگرافی تعداد مسافران بیان شده است و دانش آموز با تکمیل جدول فراوانی و نمودار میله‌ای تمرین مناسبی را انجام می‌دهد.

در فعالیت صفحه ۷۸، دانش‌آموز با توصیف و نمایش داده‌ها و متغیرهای پیوسته آشنا می‌شود. مسئله آلودگی هوا و شاخص کیفیت هوا (AQI) به عنوان یک متغیر پیوسته آشنا می‌گردد. مطالب خواندنی در این فصل در مورد آلودگی هوا و انواع آلاینده‌ها بیان می‌شود. در ادامه این فعالیت فراوانی نسبی مربوط به جدول فراوانی تعداد روزهای پاک، سالم و ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک توسط دانش‌آموز تکمیل می‌گردد. در ادامه نیز دانش‌آموز به تکمیل نمودار میله‌ای پرداخته و در ادامه نمودار فراوانی نسبی را رسم می‌کند. و در انتهای این فعالیت سؤالاتی مطرح می‌شود که دانش‌آموز به تحلیل نمودارهای رسم شده (نمودار میله‌ای و نمودار فراوانی نسبی) می‌پردازد.

در کار در کلاس صفحه ۸۰، متغیر پیوسته قد دانش‌آموزان مطرح شده و مشابه فعالیت قبل

عمل می‌شود.

## درس دوم : معیارهای گرایش به مرکز

### اهداف

- ۱ یادآوری معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین داده‌ها و میانه داده‌ها
- ۲ آشنا شدن دانش‌آموز با مفهوم میانگین موزون داده‌ها
- ۳ آشنا شدن دانش‌آموز با مفهوم مد یا نما داده‌ها، چارک اول و چارک سوم
- ۴ آشنا شدن دانش‌آموز با نحوه استفاده از سه شاخص گرایش به مرکز میانگین، میانه و مد

داده‌ها

### روش تدریس

این درس با فعالیت صفحه ۸۴ آغاز می‌شود. در این فعالیت دانش‌آموز برای تعیین میزان محصولات گردو، با جدولی که شامل چهار نوع درخت گردو و میزان محصولات آن است روبه‌رو می‌گردد. در ابتدای این فعالیت، دانش‌آموز میانگین تعداد گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت را محاسبه می‌کند. سپس با جدول دیگری روبه‌رو می‌شود. در این جدول، اطلاعات تعداد درخت‌ها اضافه شده است، در ادامه این فعالیت در صفحه ۸۵، قسمت ب، از دانش‌آموز سؤال می‌شود که آیا باز هم می‌توان میانگین تعداد گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت را به شیوه قبلی محاسبه کرد. در اینجا است که دانش‌آموز با مفهوم میانگین موزون آشنا می‌شود.

در کادرهای این صفحه با مجموع داده‌ها و نماد  $\sum_{i=1}^n X_i$  آشنا شده و فرمول‌های مربوط به میانگین و میانگین موزون داده‌ها بیان می‌شود.

در کار در کلاس این صفحه، مثالی ملموس از کنکور سراسری مطرح شده که نتیجه کارنامه آزمون دانش‌آموزی مشخص گردیده است.

دانش‌آموز تمرین مناسبی برای محاسبه میانگین موزون در این قسمت انجام می‌دهد. در ادامه معرفی معیارهای گرایش به مرکز در صفحه ۸۶، فعالیت مطرح شده است که مفهوم میانه داده‌ها را بیان می‌کند و همچنین در پایان این صفحه در کادر مورد نظر، مفاهیم میانه چارک اول و چارک سوم بیان می‌شود.

در صفحه ۹۷، با نشان دادن یک فلوجارت نحوه محاسبه میانه داده‌ها به روشنی برای دانش‌آموز شرح داده می‌شود و در ادامه در کار در کلاس در مورد تراکنش مالی و مفاهیم مربوط به آن مطالب خواندنی قرار داده شده است و دانش‌آموز در این کار در کلاس تمرین مناسبی در به دست آوردن میانه داده‌ها، چارک اول و سوم انجام می‌دهد.

در صفحه ۸۸، فعالیتی بیان شده که مفهوم مد یا نمای داده‌ها را بیان می‌کند. صورتک‌هایی قرار دارد که دانش‌آموز باید جدول موردنظر را کامل کند.

در کادر این صفحه مفهوم مد و نمای داده‌ها بیان شده است.

در انتهای این صفحه کار در کلاسی در مورد مسابقه پرتاب دارت مطرح شده است که دانش‌آموز تمرین مناسبی در به دست آوردن مد یا نمای داده‌ها انجام می‌دهد.

در صفحه ۸۹ کار در کلاس دیگری مطرح شده است که به دنبال انتخاب معیار مناسب برای معیارهای میانگین، میانه و مد داده‌هاست. در این کار در کلاس دو کارخانه تولید لامپ در نظر گرفته شده است و در جدول مربوط به طول عمر لامپ‌های تولید شده توسط این دو کارخانه اطلاعاتی قرار دارد. سؤالاتی مطرح شده است که هر کدام هدفی را دنبال می‌کند. دانش‌آموز می‌بایست براساس هر یک از اهداف سؤالات معیار مناسب گرایش به مرکز را انتخاب کند و در انتها دو کادر قرار گرفته است که در کادر اول مفهوم داده دورافتاده بیان شده و در کادر دوم به وضوح استفاده هر سه معیار میانگین، میانه و مد داده‌ها براساس هدف مورد بررسی بیان شده است.

## درس سوم : معیارهای پراکندگی

### اهداف

- ۱ یادآوری مفهوم انحراف معیار و واریانس داده‌ها
- ۲ آشنا شدن دانش آموز با مفهوم ضریب تغییرات داده‌ها
- ۳ آشنا شدن دانش آموز با نمودار جعبه‌ای
- ۴ آشنا شدن با نرخ تورم و نرخ بیکاری در جهت بالا رفتن سواد آماری دانش آموز

### روش تدریس

این درس با فعالیت صفحه ۹۳ آغاز شده است. در این فعالیت صحبت از مفهوم نرخ تورم شده است.

یکی از اقلام مصرفی مورد استفاده در محاسبه نرخ تورم، قیمت گوشت قرمز است. در این فعالیت از قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران صحبت به عمل آمده است. دانش آموز ابتدا با محاسبه میانگین قیمت گوشت قرمز و سپس با تکمیل نمودار مربوط به قیمت گوشت قرمز پراکندگی قیمت گوشت قرمز را حول خط مربوط به میانگین قیمت گوشت قرمز حس می‌کند.

در صفحه ۹۴ در کادر نحوه به دست آوردن فرمول انحراف معیار بیان می‌شود و ویژگی‌های مربوط به انحراف معیار برای دانش آموز شرح داده می‌شود.

در کار در کلاس صفحه ۹۵، دانش آموز به دنبال پیاده کردن اعداد مربوط به قیمت گوشت قرمز در فرمول انحراف معیار و واریانس داده‌ها است که این کار را قدم به قدم انجام می‌دهد. در انتهای این صفحه خواندنی مهمی قرار داده شده است.

در این خواندنی دانش آموز با مفهوم نرخ تورم آشنا شده و نحوه محاسبه آن بیان می‌گردد. دانستن این مفهوم، باعث افزایش سواد آماری در دانش آموزان می‌گردد.

در صفحه ۹۶، مفهوم جدیدی تحت عنوان ضریب تغییرات داده‌ها بیان می‌گردد. فعالیتی در این باره طرح شده است. در این فعالیت اطلاعات مربوط به طول عمر لاستیک‌های دو کارخانه الف و ب مطرح شده است و سؤالاتی چالش برانگیز برای دانش آموز مطرح می‌شود.

دانش آموز حس می کند که دیگر میانگین و انحراف معیار به تنهایی نمی تواند پاسخ سؤالات مطرح شده را دهد و به صورت ناخودآگاه به سمت مفهوم ضریب تغییرات سوق داده می شود. در کادر آخر صفحه مفهوم ضریب تغییرات و ویژگی های آن بیان می گردد.

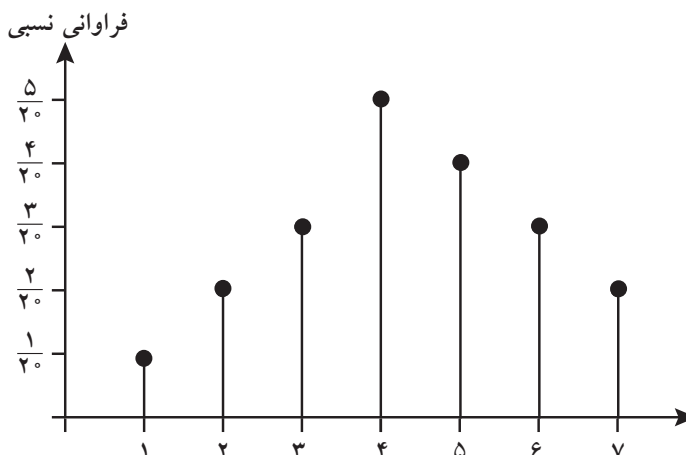
در صفحه ۹۷، کار در کلاسی قرار دارد که ادامه اطلاعات فعالیت است. در این کار در کلاس دانش آموز تمرین مناسبی برای به دست آوردن ضریب تغییرات انجام می دهد. در قسمت ب این کار در کلاس دانش آموز می آموزد که تغییر واحد اندازه گیری در ضریب تغییرات اثری نخواهد داشت.

در انتهای این صفحه دانش آموز، با مفهوم و رسم نمودار جعبه ای آشنا می شود. در صفحه ۹۸ در کادر موجود این نمودار و نحوه رسم آن شرح داده می شود. در انتهای این فصل دانش آموز با نرخ بیکاری در یک خواندنی آشنا می گردد که آموختن این موضوع باعث بالا رفتن سواد آماری دانش آموزان می گردد.

## حل تمرینات درس اول

### تمرین

۱ داده های زیر، مسافتی را که  $20^\circ$  راننده از مکان های مختلف برای رسیدن به مقصد  $A$  طی می کنند نشان می دهد. این داده ها، در جدول زیر گردآوری شده است. جدول را کامل کرده و نمودار بافت نگاشت مربوطه را رسم کنید.



دسته‌ها	کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است	فراوانی	فراوانی نسبی
۱	از ۵/۵ کیلومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر	۱	$\frac{1}{20}$
۲	از ۱۰/۵ کیلومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر	۲	$\frac{2}{20}$
۳	از ۱۵/۵ کیلومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر	۳	$\frac{3}{20}$
۴	از ۲۰/۵ کیلومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر	۵	$\frac{5}{20}$
۵	از ۲۵/۵ کیلومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر	۴	$\frac{4}{20}$
۶	از ۳۰/۵ کیلومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر	۳	$\frac{3}{20}$
۷	از ۳۵/۵ کیلومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر	۲	$\frac{2}{20}$
	مجموع	۲۰	

۲ رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است : ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز و ۵ نفر سایر رنگ‌هاست. چه نمودارهایی می‌توان برای این اعداد رسم کرد. آن نمودارها را رسم کنید؟

نمودار میله‌ای  نمودار دایره‌ای  هر دو

۳ جملات زیر را کامل کنید :

الف) برای متغیرهای پیوسته از نمودار بافت نگاشت استفاده می‌شود.

ب) برای متغیرهای گسسته از نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای استفاده می‌شود.

پ) برای متغیرهای کیفی از نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای استفاده می‌شود.

۴ گروه خونی ۵۰ دانش‌آموز پایه یازدهم به صورت زیر گردآوری شده‌اند :

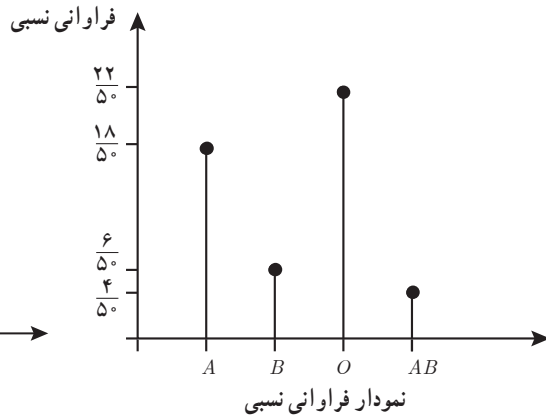
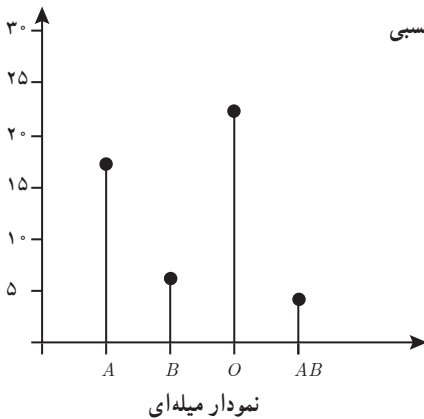
الف) جدول فراوانی مربوط به گروه خونی این افراد را رسم کنید. ب) نمودار میله‌ای مربوط

به فراوانی و فراوانی نسبی و همچنین نمودار دایره‌ای مربوط به این افراد را رسم کنید؟ (پ) چند درصد افراد، دارای گروه خونی O هستند؟



O	O	A	A	O
B	O	B	A	O
AB	B	A	B	AB
O	O	A	A	O
AB	O	A	B	A
O	A	A	O	A
O	A	O	AB	A
O	B	A	A	O
O	O	O	A	O
O	A	O	A	O

گروه خونی	فراوانی	فراوانی نسبی
A	۱۸	$\frac{۱۸}{۵۰}$
B	۶	$\frac{۶}{۵۰}$
O	۲۲	$\frac{۲۲}{۵۰}$
AB	۴	$\frac{۴}{۵۰}$
	۵۰	





$100 \times \frac{22}{50} =$  درصد افرادی که دارای گروه خونی O هستند

۵ اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی O،  $0/4$  باشد و مجموع فراوانی‌های همه گروه‌های خونی برابر  $20$  در نظر گرفته شود. فراوانی گروه خونی O چه عددی است؟

فراوانی نسبی =  $\frac{\text{فراوانی}}{\text{تعداد کل افراد}}$   $\Rightarrow 0/4 = \text{فراوانی نسبی گروه خونی O}$  و  $\sum_{i=1}^n f_i = 20 = \text{تعداد افراد}$

$$0/4 = \frac{\text{فراوانی}}{20} \Rightarrow \text{فراوانی} = 20 \times 0/4$$

۶ نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهد کودک به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این نمودار، به سؤالات زیر پاسخ دهید؟

$$1 + 2 + 8 + 31 + 40 + 58 + 42 + 13 + 3 = 200$$

الف) تعداد کل کودکان که نمره IQ آنها، مورد بررسی قرار گرفته است، چند نفر است؟

ب) نمره IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

[۱۱۰، ۱۰۰] بیشترین / [۱۶۰، ۱۵۰] کمترین

پ) چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین ۱۴۰ تا ۱۶۰ هستند؟

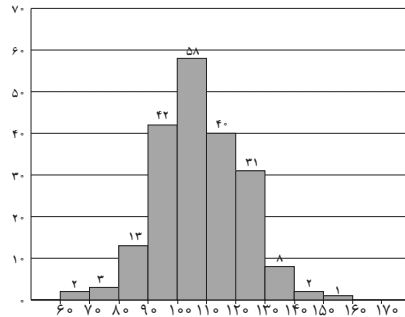
$$\frac{3}{200} = 0/015$$

ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید.

جدول فراوانی	فراوانی	فراوانی نسبی
۶۰-۷۰	۲	$\frac{۲}{۲۰۰}$
۷۰-۸۰	۳	$\frac{۳}{۲۰۰}$
۸۰-۹۰	۱۳	$\frac{۱۳}{۲۰۰}$
۹۰-۱۰۰	۴۲	$\frac{۴۲}{۲۰۰}$
۱۰۰-۱۱۰	۵۸	$\frac{۵۸}{۲۰۰}$
۱۱۰-۱۲۰	۴۰	$\frac{۴۰}{۲۰۰}$
۱۲۰-۱۳۰	۳۱	$\frac{۳۱}{۲۰۰}$
۱۳۰-۱۴۰	۸	$\frac{۸}{۲۰۰}$
۱۴۰-۱۵۰	۲	$\frac{۲}{۲۰۰}$
۱۵۰-۱۶۰	۱	$\frac{۱}{۱۰۰}$
۱۶۰-۱۷۰	۰	

۷ جدول فراوانی و نمودارهای مناسب مربوط به تعداد حروف بیت شعر زیر را به دست آورید؟

کیست این پنهان مراد در جان و تن  
کز زبان من همی گوید سخن<sup>۱</sup>



۱- این بیت شعر از کتاب گنجینه الاسرار عمان سامانی است.

فراوانی نسبی	فراوانی	حروف
$\frac{2}{41}$	۲	ک
$\frac{4}{41}$	۴	ی
$\frac{2}{41}$	۲	س
$\frac{2}{41}$	۲	ن
$\frac{5}{41}$	۵	ا
$\frac{7}{41}$	۷	ن
$\frac{1}{41}$	۱	پ
$\frac{3}{41}$	۳	م
$\frac{2}{41}$	۲	د
$\frac{2}{41}$	۲	ر
$\frac{1}{41}$	۱	ج
$\frac{1}{41}$	۱	ز
$\frac{1}{41}$	۱	ب
$\frac{2}{41}$	۲	ط
$\frac{1}{41}$	۱	گ
$\frac{2}{41}$	۲	س
$\frac{1}{41}$	۱	خ
$\frac{2}{41}$	۲	و
	۴۱	

## حل تمرین درس دوم

## تمرین

۱ تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش مسابقه گذشته به صورت ۴۳، ۴۲، ۴۵، ۴۴، ۴۵ و ۴۸ است.

میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی گذشته را به دست آورید؟

$$\bar{x} = \frac{۴۳ + ۴۲ + ۴۵ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۸}{۶} = ۴۴/۵$$

۲ بالاترین دما در هریک از روزهای هفته گذشته اندازه‌گیری شده و نتایج زیر به دست آمده

است. معدل یا میانگین دما در هفته گذشته چه عددی است؟

۵۵، ۲۷، ۲۹، ۳۲، ۲۸، ۳۱، ۲۹

$$\bar{x} = \frac{۵۵ + \dots + ۲۹}{۷}$$

۳ میانه و مد هریک از داده‌های زیر را به دست آورید؟

پ) ۱۵، ۸، ۳، ۱۰

ب) ۶۰، ۵۰، ۴۰، ۲۴، ۳۰۰

الف) ۸، ۹، ۹، ۹، ۹

ج) ۷، ۴، ۱۳، ۷

ث) ۲۳، ۱۲، ۱۲، ۲۳

ت) ۵، ۱۲، ۹، ۶، ۴

الف) ۹ = مد ۹ = میانه

ب) ندارد = مد ۵۰ = میانه

پ) ندارد = مد  $\frac{۸+۱۵}{۲}$  = میانه

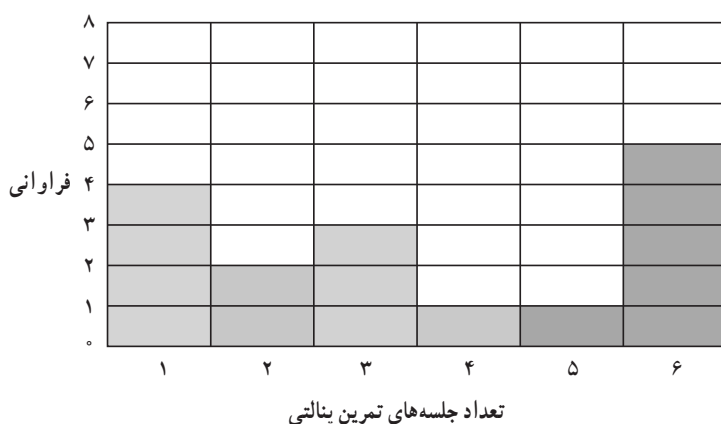
ت) ندارد = مد  $\frac{۶+۹}{۲}$  = میانه

ث) ۱۲ و ۱۳ = مد  $\frac{۱۲+۱۳}{۲}$  = میانه

ج) ۷ = مد ۷ = میانه

۴ نمودار زیر، نمودار میله‌ای مربوط به تعداد ضربات پنالتی گل شده یک بازیکن در شش جلسه تمرین پنالتی است. با توجه به نمودار، میانگین، میانه و مد تعداد ضربات گل شده را به دست آورید؟

تعداد ضربات	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۴	۲	۳	۱	۱	۵



$$\text{میانگین} = \frac{۱۶}{۶} = ۲/۶۶$$

$$\text{مد} = ۵$$

$$\text{میانه} = \frac{۲+۳}{۲} = ۲/۵$$

۵ در جدول صفحه بعد، نمرات درس ریاضی ۱۰ دانش‌آموز گردآوری شده و میانگین نمرات داده شده است. علامت‌های سؤال چه اعدادی اند؟

$$۱۵/۶۵ = \frac{۱۷/۵ + ۱۹ + ۱۷ + ۱۶ + ۲۰ + ۱۶ + ۱۵ + ۱۸ + ۱۸ + ?}{۱۰}$$

$$? = \frac{۱۵۶/۵}{۱۵/۶} = ۱$$

۱۷/۵	۱۹	۱۷	۱۶	۲۰	نمرات درس ریاضی
۱۶	۱۵	۱۸	؟	۱۸	
میانگین نمرات = ۱۵/۶۵					
مد نمرات = ۱۸ و ۱۶ دو مدی					

۶ داده‌های زیر مدت زمان مطالعه یک دانش‌آموز را در روزهای هفته نشان می‌دهد.

روزهای هفته	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
مدت زمان مطالعه (ساعت)	۲	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۲	۳	۳



این دانش‌آموز به طور میانگین چند ساعت در روز، در هفته گذشته مطالعه کرده است؟

$$x = \frac{۲ + ۱/۵ + ۲/۵ + ۱/۵ + ۲ + ۳ + ۳}{۷}$$

۷ یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به دست آمده است در صورتی که میانه و مد آن برای این خسارت‌های پرداخت شده برابر ۴۲/۲

میلیون ریال و عدد ۹۰ میلیون ریال می باشد. به نظر شما مدیر شرکت، کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا اینکه این شرکت ضرر نکند؟

$$\bar{x} = ۸۵ = \text{میانگین را انتخاب می کند}$$

$$\text{میانانه} = ۴۲/۲$$

$$\text{مد} = ۹۰$$

۸ دانش آموزی در کنکور سراسری شرکت می کند و نتیجه کارنامه آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۵۳	۲۰	۶۷	۳۴	۸۰	۶۷
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

اگر معدل موزون درصد این دانش آموز ۵۶ باشد، درس فیزیک را چند درصد زده است؟

$$\bar{x} = ۵۶$$

$$= \frac{۶۷ \times ۳ + ۸۰ \times ۴ + ۳۴ \times ۱ + ۶۷ \times ۱ + ۳ \times k + ۵۳ \times ۴}{۱۶} \Rightarrow K = ۲۰$$

۹ میانگین ۵ داده آماری ۱۷ است، اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟

$$\bar{x} = ۱۷ = \frac{\sum x_i}{۵}$$

$$\sum x_i = 17 \times 5$$

$$\text{جدید } \sum x_i = 17 \times 5 + 17 + 11 = 113$$

$$\bar{x} = \frac{113}{7} = 16.1$$

جدید

۱۵ دو دانش‌آموز، جدول‌های چهارخانه‌ای را به صورت زیر رنگ‌آمیزی کرده‌اند، بر اساس جدول مربوط به طیف رنگ‌ها، جدول عددی این دو شکل به صورت زیر نشان داده شده است:

حال جدول عددی مربوط به این دو شکل را ابتدا با هم جمع و سپس هریک از اعضای جدول عددی را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم. جدول عددی حاصل را به دست آورده و شکل مورد نظر را با توجه به جدول طیف رنگ‌ها، به دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل زیر است؟ برای پاسخ به این سؤال، کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حاشیه نشان داده شده است.


$$\begin{pmatrix} 47.0 & 58.0 \\ 69.0 & 69.0 \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} 47.0 & 47.0 \\ 58.0 & 69.0 \end{pmatrix}$$

طیف رنگ‌ها	رنگ‌ها
۴۹۵ تا ۴۵۰	
۵۷۰ تا ۴۹۵	
۵۹۰ تا ۵۷۰	
۶۲۰ تا ۵۷۰	
۷۵۰ تا ۶۲۰	

$$\text{معدل} = \begin{pmatrix} \frac{47.0 + 47.0}{2} & \frac{58.0 + 47.0}{2} \\ \frac{69.0 + 58.0}{2} & \frac{69.0 + 69.0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47.0 & 52.5 \\ 62.0 & 69.0 \end{pmatrix}$$



تمرین

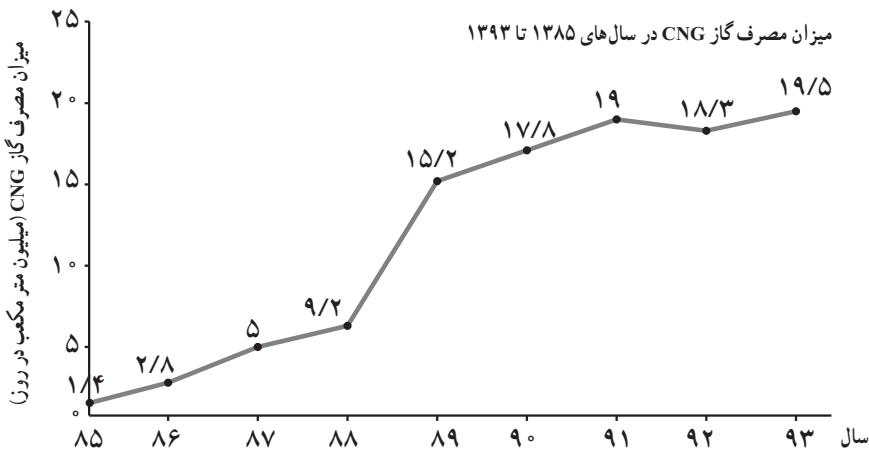
۱ فرض کنید سنّ افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند، به صورت زیر است :

۳۲،۵۹،۲۶،۵۳،۷۴،۱۷،۴۵،۲۳،۶۴،۵۰،۶۱

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سنّ افراد را به دست آورید.

۲ نمودار زیر میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز CNG از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ را به دست آورید.



۳ انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد جدول زیر به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
۱۰۰، ۱۲، ۸، ۱۶، ۱۰، ۴، ۷			
۳، ۲، ۱، ۰، ۰، -۳، -۲، -۱			
۱۰/۱۱، ۱۱/۳۶، ۱۰/۱۱ ۹/۸۸، ۹/۴۲، ۹/۷۶، ۹/۶۲			
۲، ۳۰۰۰، ۲۵۰۰، ۲۰۰۰			

۴ اعداد دلخواه را در جدول زیر بنویسید و انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات

۵ اگر ضریب تغییرات  $10^\circ$  داده ۲ باشد و میانگین آن ۴، واریانس داده‌ها را به دست آورید.

۶ اگر  $n$  داده را  $C$  برابر کنیم ضریب تغییرات داده‌ها چند برابر می‌شود؟

تغییری نمی‌کند  $c.v = \frac{\frac{\sum x \cdot \sigma}{\sum x}}{\frac{\sum x}{n}} = c.v$  جدید

۷ فرض کنید ۲۲ بوته گل قرمز را انتخاب و تعداد گل‌های هر بوته را شمرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است:

۷، ۴، ۳، ۸، ۶، ۴، ۱، ۷، ۴، ۲، ۱، ۱، ۱، ۳، ۲، ۲، ۲، ۲، ۵، ۵، ۱، ۲

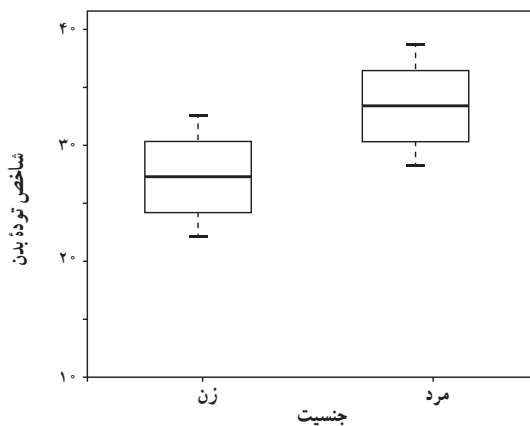
نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم کنید.

۸ نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص توده بدن (BMI) به تفکیک جنسیت رسم شده است.

این نمودار را تفسیر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) میانگین شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟ میانگین آقایان بیشتر است.

ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟ میزان پراکندگی برابر است.



۹ داده‌های زیر مربوط به نرخ بیکاری یک کشور در ده سال گذشته است :

سال	اوّل	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نرخ بیکاری	۱۱/۵	۱۱/۳	۱۰/۵	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۳/۵	۱۲/۳	۱۲/۲	۱۰/۴	۳۰/۱

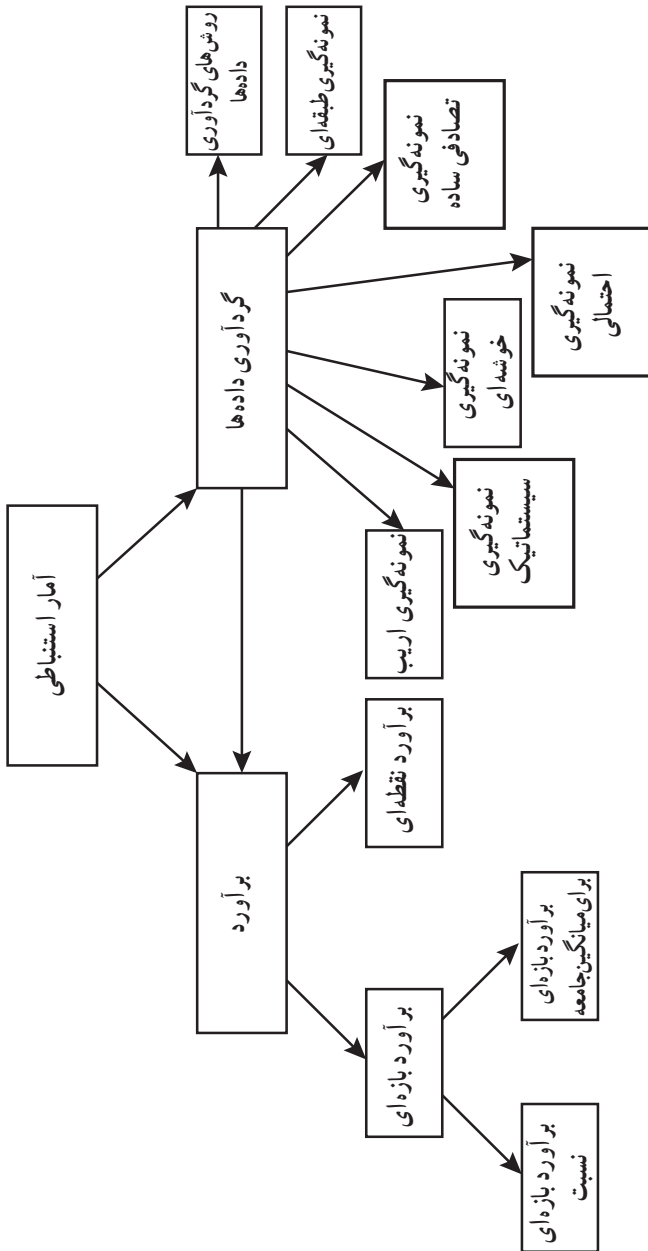
نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنید.



## فصل چهارم

### آمار استنباطی

## نقشه مفهومی فصل ۴



## اهداف فصل استنباط آماری

علوم تجربی نظیر کشاورزی و پزشکی نیازهای اساسی بشر را رفع می‌کنند. در این علوم علی‌رغم اینکه یقین کامل برای حل مسئله وجود ندارد، ولی بسیار کاربردی هستند و مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک پزشک بیماری را ۱۰۰ درصد تشخیص نمی‌دهد و داروی تجویز شده نیز به همین وضعیت دچار است. ولی پزشک بر اساس تجربه حکم به بیماری داده و دارو تجویز می‌کند و در اکثر موارد نیز نتیجه می‌گیرد. به عبارت دیگر علوم تجربی مسائلی را با دقت زیادی حل می‌کنند، ولی روابط به دست آمده را نمی‌توانند به صورت ریاضی بیان کنند. علم آمار راهی برای بیان چنین مسائلی است. مردم اغلب آمار را به عنوان معنای قدیمی آن یعنی گردآوری داده‌ها می‌شناسند، ولی علم آمار کاربردهای گوناگونی دارد. در آمار توصیفی راه‌های تلخیص داده‌ها را با معیارهای مختلف و نمودارهای گوناگون بیان و اطلاعات آنها را ساده و قابل استفاده می‌کند. اوج علم آمار استفاده از علم احتمال برای ابداع آمار استنباطی بوده است. آمار استنباطی استخراج نتایجی بر اساس بخش کوچکی از داده‌ها در یک مسئله است که می‌توان آن را به همه داده‌های آن مسئله تعمیم داد.

### چرا آمار استنباطی؟

- آمار توصیفی، داده‌ها یا جامعه را توصیف می‌کند. در حالی که در آمار علاقه‌مند هستیم براساس نمونه درباره پارامتری از جامعه تخمین (برآورد) یا پیش‌بینی ارائه کنیم.
- آمار توصیفی با استفاده از داده‌ها برخی از مشخصه‌های داده‌ها را توصیف می‌کند. حال آنکه ما می‌خواهیم به تحلیل داده‌ها و مشاهدات بپردازیم.
- آمار توصیفی با معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی داده‌ها سرکار دارد. اما بی‌بردن به صحت یک ادعا در مورد پارامترهایی نظیر گرایش به مرکز با استفاده از داده‌ها موضوعی جذاب‌تر است.
- معیارهای آمار توصیفی مانند میانه، میانگین و مد عدد دقیق هستند، ولی معیارهایی که معمولاً بر اساس تعداد کمی داده به دست آمده‌اند همیشه با خطا همراه هستند.
- آمار توصیفی می‌تواند برای داده‌های جامعه بدون داشتن خطا نتیجه‌گیری کند. ولی چون معمولاً جامعه در دسترس نیست این کار دقت لازم را ندارد.
- در آمار توصیفی نمی‌توان نتیجه را به خارج از داده‌های مشاهده‌شده توسعه داد در حالی که هدف اصلی آمار توسعه نتایج به خارج از داده‌های مشاهده‌شده یا اصطلاحاً جامعه است.
- با توجه به ۶ دلیل ذکر شده در آمار نیاز به روش‌هایی وجود دارد که بتواند بر اساس تعداد

معدودی داده از یک جامعه بزرگ صحت و سقم یک ادعا در آن جامعه را بررسی و نتیجه بگیرد. از آنجا که آمار توصیفی از انجام این کار عاجز است. آمارشناسان نظریه‌ای را بسط داده‌اند که این کار امکان‌پذیر شود. نام آن را **آمار استنباطی** گذاشته‌اند. به سخنی دیگر آمار استنباطی روش‌های آماری است که بر اساس نمونه‌ای از یک جامعه بتوان در مورد مشخصه‌ای از جامعه که پارامتر می‌نامند نتیجه‌گیری کند. با این مقدمه نقش نمونه در استنباط آماری بسیار پررنگ می‌شود. در واقع ترتیب قرار گرفتن درس‌های فصل آخر کتاب نیز به وضوح روشن می‌شود. درس اول فصل ۴ به گردآوری داده‌ها و درس دوم آن به دو روش مرسوم استنباط آماری، برآورد و برآورد بازه‌ای یا فاصله اطمینان اختصاص دارد.

استنباط آماری بر اساس نمونه انجام می‌گیرد. ولی نمونه‌ای که برای این کار قابل استفاده است، ساده‌ترین روش نمونه‌گیری، نمونه‌گیری تصادفی ساده است، که استنباط آماری بر اساس آن امکان‌پذیر است. در عمل این روش نمونه‌گیری محدودیت‌های زیادی دارد که معمولاً بر اساس یکی از روش‌های نمونه‌گیری احتمالی رفع می‌شوند. لذا درس اول به معرفی انواع نمونه‌گیری‌های احتمالی می‌پردازد. از سوی دیگر در برخی مواقع نمونه گردآوری شده ممکن است ما را به استنباطی غلط در مورد جامعه برساند. برای پرهیز از آن در کتاب به مفهوم نمونه ناریب اشاره شده و در خواندنی پس از آن به شرح یک مثال واقعی که در حال حاضر گریبان‌گیر جامعه است پرداخته شده است.

مفهوم بعدی که در ادامه کار باید با آن آشنا شد این است که چگونه مقادیر داده‌های گردآوری شده را به دست می‌آوریم. بعد از تعریف آمارگیری چهار روش مرسوم به دست آوردن مقادیر داده‌ها در این قسمت کتاب توضیح داده شده است. در واقع با نمونه‌گیری داده‌ها گردآوری می‌شود. ولی هدف اصلی ما اطلاع از مقادیر متغیرهای آنها است. لذا گردآوری داده‌ها شامل نمونه‌گیری و ثبت مقادیر متغیرهای داده‌ها است.

حال زمان استفاده از این اعداد است. لذا به معرفی آماره و پارامتر می‌پردازیم که قبلاً به صورت ضمنی با آنها آشنا شده‌اند؛ که اساس درس دوم فصل ۴ را نیز تشکیل می‌دهند. درس اول فصل ۴ بسیار ساده است و به سرعت می‌توان آن را درس داد. درس دوم فصل ۴ با وجود آنکه بسیار کوتاه‌تر از درس اول است، ولی تدریس آن زمان بیشتری از درس اول می‌گیرد. در درس دوم دانش‌آموز نتیجه زحماتی را که در یادگیری مباحث آمار و احتمال کشیده است را خواهد گرفت.



## درس اول : گردآوری داده‌ها

### فعالیت صفحه ۱۰۴

#### اهداف

- دلایل استفاده از نمونه‌گیری
- آشنایی با محدودیت‌های بررسی کل جامعه یا سرشماری
- تعریف چهار اصطلاح پرکاربرد در آمار : واحد آماری، جامعه آماری یا جامعه، نمونه و نمونه‌گیری

بعد از این فعالیت دانش‌آموز این اصطلاح‌ها را برای فعالیت تدریس شده در کار در کلاس تکمیل می‌کند.

- بررسی ویژگی‌های همه جامعه دارای محدودیت‌های زیادی است.
- امکان دسترسی به همه جامعه وجود ندارد.
- زمان لازم برای بررسی جامعه زیاد و هزینه بر است.

### فعالیت صفحه ۱۰۵

#### اهداف : آشنایی با انواع نمونه‌گیری بر مبنای احتمال

این فعالیت از چهار بخش تشکیل شده است. صورت مسئله هر چهار بخش یکسان است. یعنی یک مجتمع تجاری با هفت مغازه و یک بخش خدمات تشکیل شده و علاقه‌مند هستیم اطلاعاتی از اعضای جامعه به دست آوریم. در این فعالیت اندازه یا تعداد اعضای جامعه مشخص است. برای سادگی مسئله اندازه جامعه کوچک در نظر گرفته شده است.

در هر بخش از فعالیت یک مسئله انتخاب نمونه مطرح می‌شود که در آخر فعالیت منجر به تعریف یکی از انواع نمونه‌گیری‌های احتمالی می‌شود. در بخش اول این فعالیت به دلیل ارتباط تعریف با مباحث درس‌های قبلی تعریف نمونه‌گیری تصادفی ساده قبل از فعالیت آمده است.

## فعالیت ۱

دانش آموز با مفهوم شانس و شانس برابر در سال های قبل آشنا شده است. او در فصل های قبل دریافته است که شانس برابر با احتمال برابر یکی است. تأکید این فعالیت بر این است که ضمن آشنایی دانش آموز با نمونه گیری تصادفی ساده چگونگی انجام آن را نیز یاد بگیرد و با محدودیت های روش های پیشنهادی کتاب یا خودش آشنا شود. البته راه حل کلی این کار در آخرین خواندنی این درس آورده شده که ممکن است توسط دانش آموزان نیز پیشنهاد شود.

بعد از ذکر این نکته از دانش آموز به طور ضمنی خواسته شده اثبات کند که روش نمونه گیری ذکر شده یک نوع نمونه گیری تصادفی ساده است که با استفاده از اطلاعات فصل های قبل با تعریف پیشامد مناسب و احتمال شرطی این کار را می توان انجام داد. به صورت رسمی تر در تمرین ها دوباره همین سؤال تکرار شده است. لذا در صورتی که زمان کافی در اختیار نداشتید اثبات آن را به عنوان تمرین واگذار کرده و صرفاً به صورت شهودی هم شانس یا هم احتمال بودن اعضای جامعه را توجیه کنید. دقت کنید در این بخش حرفی از نمونه با جایگذاری و بدون جایگذاری به میان نیامده است. لذا همان طور که عقل سلیم حکم می کند منظور ما از نمونه گیری تصادفی ساده نمونه گیری بدون جایگذاری است. هر چند که اثبات فرمول ها پیچیده تر خواهد شد، ولی چون در عمل این گونه پیاده سازی می شود پس بهتر است با نمونه های بدون جایگذاری کار کنیم. یادآوری می کنیم که چه نمونه با جایگذاری و چه بدون جایگذاری در هر دو صورت نمونه به دست آمده تصادفی است.

## فعالیت ۲

بخش های بعدی فعالیت به برطرف کردن نواقص موجود در نمونه گیری تصادفی ساده اختصاص دارد. در فعالیت دوم هدف کاستن از هزینه و زمان نمونه گیری تصادفی ساده است. از سوی دیگر در این روش نیاز به داشتن فهرستی از اعضای جامعه نیست و صرفاً با داشتن فهرستی از خوشه ها قابل انجام است. نمونه گیری خوشه ای یک روش نمونه گیری احتمالی است که بعد از این فعالیت در مورد آن صحبت خواهد شد.

## فعالیت ۳

در این فعالیت نمونه گیری طبقه ای شرح داده شده که هدف آن افزایش دقت نمونه گیری است. محدودیت این روش علاوه بر مشخص بودن فهرست واحدهای آماری نیاز به اطلاعاتی در خصوص جامعه است که بتوان توسط آن جامعه را به بخش هایی افراز کرد و بر اساس اهمیت هر یک از افرازاها نمونه متناسب گرفت.

## فعالیت ۴

در این فعالیت سعی شده نمونه‌گیری سامان‌مند که نوع دیگری از نمونه‌گیری طبقه‌ای است؛ شرح داده شود که نیاز به دانستن فهرست واحدهای آماری ندارد. علاوه بر آن برای داده‌هایی که به صورت یک جریان یا خط تولید باید گردآوری شوند کاربرد بسیاری دارد. از سوی دیگر در این نوع نمونه‌گیری نیاز به اطلاع از یک ویژگی که بتوان توسط آن جامعه را به بخش‌هایی افراز کرد ندارد. اندازه هر طبقه بر اساس اندازه نمونه مورد نیاز مشخص می‌شود.

**کار در کلاس:** جدول زیر را می‌توانید کامل‌تر کنید.

محدودیت	مزیت	روش نمونه‌گیری
نیاز به فهرست اعضای جامعه دارد	نمونه‌گیری از جامعه با اندازه کوچک ساده است	تصادفی ساده
کاهش دقت	فقط نیاز به فهرستی از خوشه‌ها دارد سرعت زیاد و هزینه کمتر	خوشه‌ای
نیاز به اطلاعات اضافی از جامعه، افزایش هزینه	افزایش دقت	طبقه‌ای
در هر جامعه‌ای قابل پیاده‌سازی نیست	نیاز به فهرست اعضای جامعه ندارد	سامان‌مند

**فعالیت:** از مگس‌های سفید با چه روشی می‌توان نمونه‌گیری کرد؟ فهرستی از آنها نداریم، تعداد آنها را هم نمی‌دانیم. می‌توان چند منطقه از تهران را به تصادف انتخاب کرد و در هر منطقه نمونه در دسترس را انتخاب و بررسی کنیم. آیا این روش نمونه‌گیری به تمامی واحدهای نمونه شانس انتخاب می‌دهد؟ خیر

چهار روش نمونه‌گیری ذکر شده چگونه؟ بله همه آنها نمونه‌گیری احتمالی هستند، البته با دلیل شهودی.

## فعالیت صفحه‌های ۱۰۷ و ۱۰۸

در این دو فعالیت به دو نکته مهم در انجام نمونه‌گیری اشاره شده است. اگر نمونه‌گیری احتمالی باشد اطلاعاتی که از این نوع نمونه‌گیری به دست می‌آید را نمی‌توان به جامعه گسترش داد. به عبارت دیگر استنباط آماری که هدف اصلی آمار است امکان‌پذیر نیست. از سوی دیگر اگر جامعه

درست انتخاب نشود، باز هم امکان استنباط غلط وجود دارد، حتی اگر اندازه نمونه را افزایش دهیم وضع بدتر هم می‌شود.

این پایان بحث نمونه‌گیری است. در دو کار در کلاس سعی شده این مفهوم به خوبی برای دانش‌آموز واضح شود. دلیل آن اطلاعات غلطی است که در اخبار روزمره به گوش همه می‌رسد، ولی ممکن است از تکذیب یا نادرست بودن آن مطلع نشویم. از سوی دیگر شاید خود ما دچار چنین اشتباهی شویم. خواندنی صفحه ۱۱۰ به یکی از موارد اشتباه در نمونه‌گیری اشاره می‌کند که باعث از بین رفتن سرمایه بسیاری از هموطنانمان شده است. در ادامه یک مثال واقعی از اربیی در نمونه‌گیری آمده است.

در جنگ جهانی دوم، شانس بازگشت یک جنگنده از مأموریت ۵۰ درصد بود. کارشناسان به این نتیجه رسیده بودند که باید زره تقویتی به هواپیماها اضافه کنند تا آنها را در برابر آتش ضدهوایی حفاظت کند؛ اما افزودن زره به همه قسمت‌های هواپیما امکان‌پذیر نبود و سرعت را بسیار کم و آن را آسیب‌پذیرتر می‌کرد؛ بنابراین آنها باید تصمیم می‌گرفتند که به کدام قسمت‌های هواپیما زره بیفزایند. به همین دلیل به گردآوری داده‌ها در مورد نقاطی از هواپیما که آسیب دیده بود، می‌پرداختند. آنان پس از هر مأموریت هواپیماهایی را که بازگشته بودند بررسی می‌کردند و تعداد آسیب‌های ناشی از ترکش‌ها و گلوله‌ها و جای آنها را روی هواپیما مشخص می‌کردند. به تدریج مشخص شد الگوی خاصی در توزیع آسیب‌ها روی هواپیماها وجود دارد. شکل زیر نشان می‌دهد که بیشتر آسیب‌ها روی ناحیه بال و بدنه هواپیما بوده است.



اما آبراهام والد آمارشناس مشهور با این نتیجه‌گیری کاملاً مخالف بود. والد نشان داد که خطای مهمی در تحلیل‌ها صورت گرفته چراکه نتیجه‌گیری تنها بر اساس داده‌های هواپیماهایی است که از مأموریت بازگشته‌اند؛ اما در مورد هواپیماهایی که در طول مأموریت سقوط کردند، چه می‌دانیم؟ در واقع نمونه آماری در دسترس نمونه اریبی بوده است. والد نشان داد که دقیقاً برعکس، آن قسمت‌هایی از هواپیما نیاز به حفاظت دارند که کمترین اصابت را داشته‌اند. پیشنهادهای والد در عمل به بهبود نرخ بازگشت هواپیماها کمک کرد<sup>۱</sup>.

### فعالیت صفحه ۱۱۲ و ۱۱۴

این دو فعالیت به روش‌های گردآوری داده‌ها و اندازه‌گیری مقادیر متغیرهای آنها اختصاص دارد. اگر این دو فعالیت و کار در کلاس آنها را انجام دهیم، چندین اصطلاح جدید که به صورت غیر رسمی در درس‌های قبلی با آن به طور ضمنی آشنا شده‌اند تعریف خواهند شد.

آمارگیری گردآوری داده‌ها با یکی از روش‌های ممکن است. در واقع نمونه‌گیری بخشی از آمارگیری به حساب می‌آید. در آمارگیری علاوه بر آنکه باید نمونه‌گیری انجام شود باید مقادیر متغیرهای هر نمونه نیز اندازه‌گیری شده یا به دست آید. برای اینکه مقدار متغیر مورد بررسی، نمونه انتخاب شده در نمونه‌گیری، را به دست آوریم معمولاً از چهار روش که مشاهده، پرسشنامه، مصاحبه، و دادگان نام دارند استفاده می‌شود.

نکته‌ای که باید به آن توجه داشت این است که اگر برای هر داده فقط یک متغیر مورد بررسی قرار گیرد معمولاً از متغیر نام برده نمی‌شود و صرفاً به آن داده می‌گویند. همان‌گونه که در مثال‌ها و کار در کلاس‌ها دیده‌اید برای یک عضو نمونه چند متغیر اندازه‌گیری می‌شود. ولی در این کتاب برای سادگی کار بیشتر با یک متغیر سروکار دارد لذا در خیلی از مثال‌ها اسمی از متغیر برده نمی‌شود و به آن داده می‌گویند.

این درس با تعریف پارامتر یا پارامتر جامعه، آماره یا آماره نمونه، و نهایتاً تعریف آمار استنباطی به پایان می‌رسد. ما به تعریف دقیق این مفاهیم در درس بعد نیاز داریم و از برخی از آنها استفاده می‌کنیم.

در ادامه با یک متن خواندنی لقمان و مرد پیاده این بخش را به پایان می‌رسانیم.

روزی لقمان در کنار چشمه‌ای نشسته بود. مردی که از آنجا می‌گذشت از لقمان پرسید: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهیم رسید. لقمان گفت: راه برو. آن مرد پنداشت که لقمان نشنیده است. دوباره سؤال کرد: مگر نشنیدی؟ پرسیدم: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهیم رسید؟ لقمان گفت: راه برو. آن مرد پنداشت که لقمان دیوانه است. برای همین راه خود را گرفت و رفت. زمانی که چند قدمی راه رفت، لقمان به بانگ بلند گفت یک ساعت دیگر بدان ده خواهی رسید. مرد گفت: چرا اول نگفتی؟ لقمان گفت: چون راه رفتن تو را ندیده بودم، نمی‌دانستم تند می‌روی یا کند. حالا که دیدم دانستم که تو یک ساعت دیگر به ده خواهی رسید. در این داستان ساده و قدیمی تمام اصول آماری رعایت شده است. چرا؟

نکته ظریف داستان این است که لقمان فقط می‌گوید «راه برو» و توضیح دیگری نمی‌دهد. لقمان نمی‌گوید که می‌خواهم راه رفتن تو را ببینم تا از روی آن بگویم چه مدت طول می‌کشد تا به ده برسی، زیرا لقمان فکر می‌کند این اطلاع ممکن است در راه رفتن آن مرد اثر بگذارد و در نتیجه سرعتی که لقمان تخمین می‌زند، سرعت واقعی راه رفتن آن فرد نباشد و در نتیجه زمانی را که تخمین خواهد زد، مدت زمان دقیقی نباشد.

### بخش برآورد

فرض کنید شما می‌خواهید با دوستان بیرون بروید. او می‌گوید سینما برویم، شما می‌خواهید نوشیدنی میل کنید، او می‌گوید فلان فیلم، شما می‌گویید ساعت فلان. حالا دفعه بعد پیشنهاد می‌کند تا با دو تا از دوستانش بیرون بروید و شما خوردن آش پیشنهاد می‌کنید اما آنها آش دوست ندارند و می‌گوید به جای آن شیرینی بخوریم، در جایی دیگر شما می‌خواهید به سینما بروید و فلان فیلم را پیشنهاد می‌کنید، اما دوستان قبلاً آن فیلم را دیده و فیلم دیگری پیشنهاد می‌کند. احتمالاً خودتان می‌دانید که در دسر برنامه‌ریزی با افزایش تعداد نفرات به صورت توانی افزایش می‌یابد و از معادله مشهور ایشتین،  $E = mc^2$ ، پیروی می‌کند، که در آن  $E$  معرف میزان زحمت،  $m$  میانگین غرغر و  $c$  اندازه نمونه است.

آمار هم به همین شکل است، اما به نوعی معکوس: معادله ایشتین در آمار به این شکل

است:

$$c^{2/5} (\text{اندازه نمونه}) / \text{انحراف معیار جامعه} = \text{انحراف معیار میانگین}$$

انحراف معیار میانگین هرچه کمتر شود دقت برآورد بیشتر می‌شود. انحراف معیار جامعه ثابت است پس برعکس فرمول ایشستین با افزایش تعداد اعضای نمونه دقت افزایش می‌یابد. به عنوان مثال فرض کنید درباره نحوه برگزاری آزمونی که اخیراً برگزار شده، از ۲ دانش‌آموز نظرخواهی کرده‌ایم و  $50\%$  راضی بودند. حالا اگر همین نظرخواهی را بر روی نمونه ۱۶ تایی انجام دهیم و به نتیجه  $80\%$  و با نمونه ۲۵ تایی به  $75\%$  برسیم کدام نتیجه دقیق‌تر است؟ در نتیجه اگر نمونه کوچکی از جامعه را با رعایت تمامی نکات نمونه‌گیری انتخاب کنیم، احتمال آن وجود دارد که آنچه خلاف حقیقت است نتیجه شود.

### اهداف

- آشنایی با برآورد
- تعریف برآورد نقطه‌ای (برآورد) و برآورد بازه‌ای (بازه اطمینان)
- توزیع نمونه‌گیری (نمونه‌ای) میانگین نمونه
- انحراف معیار میانگین نمونه
- مشخص کردن اندازه نمونه برای برآورد درصد

### فعالیت صفحه ۱۱۸

در اولین فعالیت این بخش سعی شده بود رابطه بین برآورد و آماره با یک مثال شرح داده شود. به مقدار عددی یک آماره، «برآورد» پارامتر جامعه نظیر آن آماره می‌گوید. از آنجا که برآورد یک پارامتر یک عدد است به آن برآورد نقطه‌ای گفته می‌شود. بعضی مواقع به جای واژه برآورد نقطه‌ای از واژه برآورد استفاده می‌شود.

هنگامی که از یک برآورد نقطه‌ای برای برآورد یک پارامتر جامعه مورد نظر استفاده می‌شود اینکه مقدار برآورد نقطه‌ای با مقدار پارامتر برابر شود احتمال کمی دارد. بنابراین از مقدار برآورد نقطه‌ای برای کمک به ساختن یک برآورد بازه‌ای برای پارامتر استفاده خواهیم کرد. ما قادریم که با اطمینان معینی اظهار کنیم که این پارامتر در داخل این بازه قرار می‌گیرد و به این علت به این بازه‌ها بازه‌های اطمینان اطلاق می‌کنیم. به ویژه برآوردهای بازه‌ای با اطمینان ۹۵ درصد برای پارامترها را بررسی می‌کنیم ولی هر درصد دیگری را می‌توان در نظر گرفت.

برای ساختن بازه اطمینان یا برآورد بازه‌ای برای پارامتر میانگین جامعه نیاز داریم که خطای

نمونه‌گیری را برای میانگین نمونه محاسبه کنیم. منظور از خطای نمونه‌گیری میانگین نمونه، تغییر مقادیر برآورد میانگین جامعه از یک نمونه به نمونه دیگر است. از آنجا که انحراف معیار برای اندازه‌گیری پراکندگی داده‌ها به کار می‌رود، می‌توانیم در این مسئله انحراف معیار برآوردها را محاسبه کنیم. به بیان دیگر از جامعه چند بار نمونه می‌گیریم و برای هر نمونه برآورد میانگین جامعه را محاسبه می‌کنیم. حال اگر انحراف معیار این برآوردها را محاسبه کنیم، می‌توانیم به پراکندگی برآوردها یک مقدار عددی نسبت دهید که همان انحراف معیار برآوردهای میانگین‌های نمونه است.

#### کار در کلاس صفحه ۱۱۹ فعالیت صفحه ۱۲۰

هدف ما در اینجا انتقال مفهوم خطای نمونه‌گیری برآورد میانگین جامعه (که همان میانگین نمونه است) به طریقی دیگر به دانش‌آموز است. در واقع در این کار در کلاس و فعالیت بعد از آن با استفاده از احتمال، نحوه تغییرات میانگین نمونه را زمانی که اندازه نمونه افزایش می‌یابد را بررسی می‌کنیم. به صورت شهودی نشان داده شده که با افزایش اندازه نمونه پراکندگی برآورد میانگین جامعه کم می‌شود ولی نتیجه این بررسی را به صورت یک اصل در کادر صفحه ۱۲۱ آورده‌ایم که می‌گویند انحراف معیار برآورد میانگین نمونه برابر انحراف معیار جامعه تقسیم بر ریشه دوم اندازه نمونه است.

خطای نمونه‌گیری در بیان ساده عبارت است از احتمال اینکه نتیجه اشتباه از تحقیق گرفته شود. بنابراین برای کاهش این خطا می‌بایست اندازه نمونه را ..... داد. هرچه انحراف معیار جامعه ..... باشد حجم نمونه بیشتری مورد نیاز است.

#### فعالیت صفحه ۱۲۲

نتیجه کار در کلاس و فعالیت‌های قبل طی چند سؤال مطرح شده و نتیجه آن بدون اثبات به صورت فرمول بازه اطمینان در کادر آمده است.

#### فعالیت آخر صفحه ۱۲۲

درصد حالت خاصی از میانگین است که داده‌ها به صورت صفر و یک هستند. برای درصد همانند میانگین می‌توان بازه اطمینان تشکیل داد ولی به دلیل صفر و یک بودن داده‌ها می‌توان فرمول بازه اطمینان برای میانگین جامعه را به صورت فرمولی که در صفحه ۱۲۳ آمده است ساده کرد. خوبی این فرمول آن است که می‌توانیم دقت فاصله اطمینان را قبل از نمونه‌گیری مشخص کنیم.



این نکته از آن جهت حائز اهمیت است که در تمام تحقیقات آماری اندازه نمونه را بر اساس دقتی که نیاز است مشخص می‌کنند. منظور از دقت در برآورد بازه‌ای طول بازه اطمینان هرچه طول بازه کمتر باشد برآورد بازه‌ای بیشتر است. دقت برآورد اطمینان به اندازه نمونه و مقدار انحراف معیار وابسته است. از آنجا که برای متغیرهای دودویی حداکثر مقدار انحراف معیار قابل محاسبه است، بازه اطمینان برای درصد صرفاً به اندازه نمونه وابسته است. با توجه به آنکه در فرمول بازه اطمینان به دانستن اندازه جامعه نیازی نیست. به سادگی می‌توان اندازه نمونه را برحسب ضریب اطمینانی که می‌خواهیم بازه اطمینان را محاسبه کنیم به دست آوریم. با توجه به اینکه ضریب اطمینان در این کتاب ثابت و برابر ۹۵ درصد در نظر گرفته شده، نیاز به در نظر گرفتن این کمیت نداریم.

## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ در نمونه‌گیری تصادفی ساده، از یک جامعه  $100^\circ$  نفری احتمال اینکه فرد به خصوصی در اولین انتخاب عضو نمونه باشد،  $10\%$  است. اگر مسئله بدون جای‌گذاری باشد، و از نتیجه انتخاب اول اطلاع نداشته باشیم، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟  
**جواب:**  $10\%$  است از احتمال شرطی یا قوانین شمارش اثبات می‌شود.

۲ فرق بین آماره با پارامتر چیست؟

**جواب:** پارامتر مشخصه‌ای مربوط به جامعه که دارای مقداری ثابت ولی نامعلوم است و آماره مشخصه‌ای عددی مربوط به نمونه است، ص ۱۱۵ کتاب.

۳ در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاهای گیاهی، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی ناهار یا شام سفارش داده‌اند. سه آماره نام ببرید.

**جواب:** آماره مشخصه‌ای عددی مربوط به نمونه است.

الف) تعداد مشتری‌هایی که وعده غذایی ناهار سفارش داده‌اند.

ب) تعداد مشتری‌هایی که وعده غذایی شام سفارش داده‌اند.

ج) درصد مشتری‌هایی که وعده غذایی شام سفارش داده‌اند.

۴ در یک نمونه تصادفی از  $100^\circ$  پسر  $80^\circ$  نفر طرفدار کلاس‌های بعدازظهر هستند. یک بازه

اطمینان  $95\%$  درصد برای نسبت پسرها عبارت است از فاصله

**جواب:**

$$\left( p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

$$\left( 0.8 - 2\sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}}, 0.8 + 2\sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} \right) = (0.72, 0.88)$$

۵ اگر در سؤال ۴ اندازه نمونه را چهار برابر کنیم طول بازه اطمینان چه تغییری می‌کند؟

**جواب:** طول بازه اطمینان نصف می‌شود ص ۱۲۳ کتاب

۶ اگر یک نمونه تصادفی به اندازه پنج به صورت ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ داشته باشیم، یک بازه

اطمینان  $95\%$  درصد برای میانگین جامعه عبارت است از:

جواب :

$$\bar{x} - 2\sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 2\sigma / \sqrt{n}$$

$$\left( 3 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 3 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right) = (3 - 1/26, 3 + 1/26)$$

۷ اگر از یک جامعه بزرگ ۱۰۰ بار نمونه ۱۰ تایی بگیریم و ۱۰۰ بازه اطمینان ۹۵ درصد محاسبه کنیم انتظار داریم چند تا از این بازه‌های اطمینان ۹۵ درصدی پارامتر میانگین جامعه را در بر بگیرند؟

جواب : تقریباً ۹۵ درصد ص ۱۲۷ و ۱۲۶ کتاب

۸ فرض کنید می‌خواهیم میزان آلاینده‌گی خودروهای شهری را بررسی کنیم. کدام یک از نمونه‌گیری‌های زیر اریب نیست؟

جواب : نمونه‌گیری از پلاک خودروها ص ۱۰۹ کتاب.

۹ برای بررسی درآمد ساکنان شهر تهران کدام روش نمونه‌گیری مناسب‌تر است؟

جواب : طبقه‌ای

به دلیل وجود اختلاف طبقاتی سطح درآمد در شهر تهران حداقل باید به دو طبقه شمال شهر و جنوب شهر تقسیم شود.

۱۰ طول قد دانش‌آموزان مدرسه‌ای را چگونه گردآوری می‌کنید؟

جواب : دادگان : اگر طول قد دانش‌آموزان در کارت بهداشت آنها درج شده باشد. در کتاب پاسخ دیگری داده شده که همگی صحیح هستند.



معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۶۵۸۷۵/۴۸۷۴ - گروه دسی مربوط و یا پیام نگار (Email)

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تالیف کتاب های دسی عمومی متوسط نظری