

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

ریاضی

رشته‌های ریاضی و فیزیک – علوم تجربی

راهنمای معلم

پایه دهم
دوره دوم متوسطه

۱۳۹۵



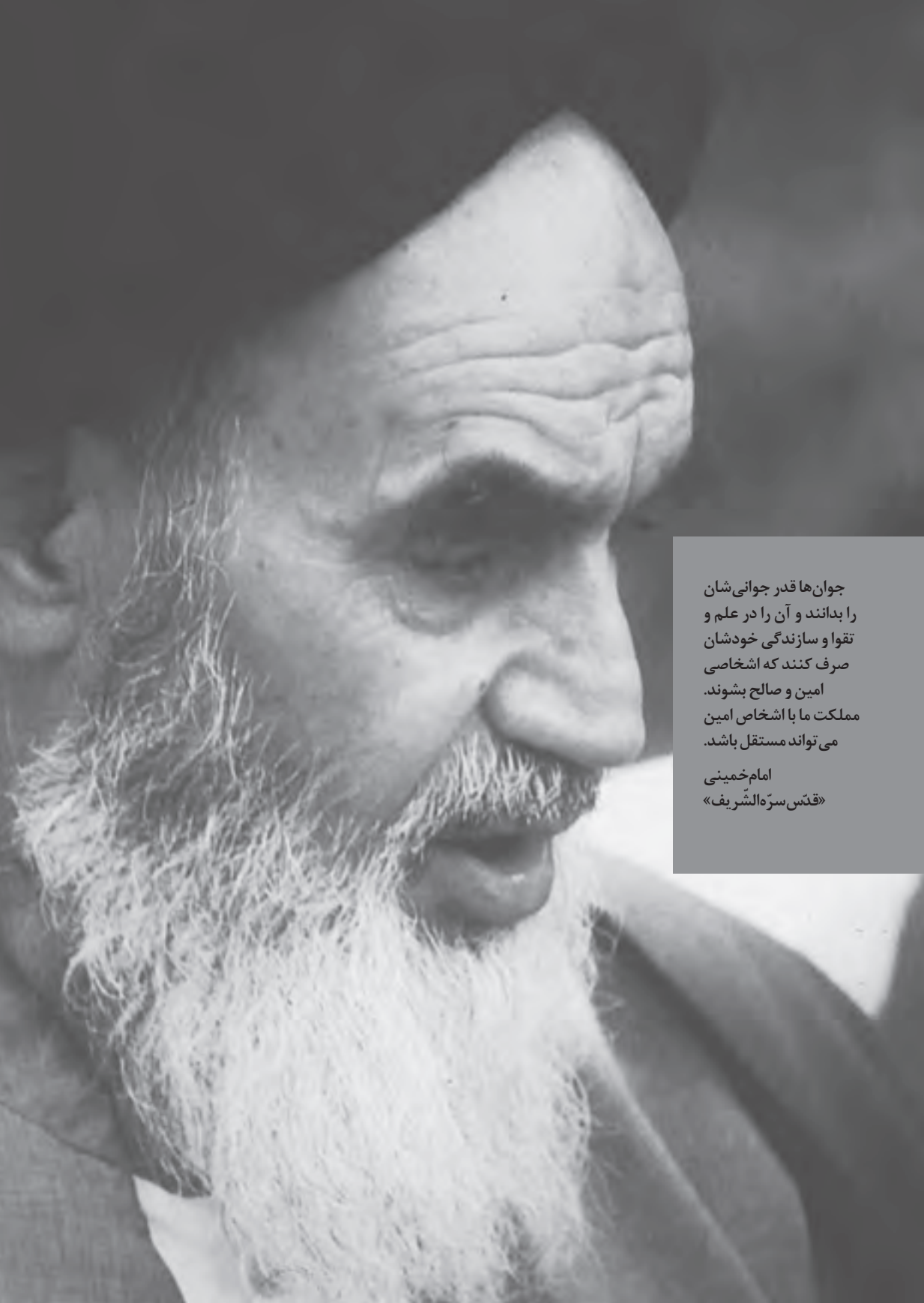
وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

- نام کتاب : راهنمای معلم ریاضی - پایه دهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۰۳۶۴
- پدیدآورنده : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
- مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف : دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
- شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف : حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، طیبه حمزه‌بیگی، خسرو داودی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا، اکرم قابل رحمت و محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
- مدیریت آماده‌سازی هنری : حمیدرضا امیری، محمدحسین بیژن‌زاده، احسان بهرامی سامانی، رضا حیدری قزلبچه، محمود داورزنی، ابراهیم ریحانی، مهین سنقری، محمدرضا سیدصالحی، فاطمه عرق‌ولو، مجتبی قربانی، فریده کمالی، آناهیتا کمیجانی، سارا مرعشی‌نیا (اعضای گروه تألیف)
- مدیریت آماده‌سازی هنری : اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
- شناسه افزوده آماده‌سازی : لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - سمیه قنبری (صفحه‌آرا) - مریم دهقان‌زاده (رسام)، سیده‌فاطمه محسنی، افسانه امیراحمدی، علی نجمی، علی مظاهری نظری‌فر، سپیده ملک‌ایزدی، احمدرضا امینی، حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
- نشانی سازمان : تهران : خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن : ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه : www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir
- ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران : کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروبخش) تلفن : ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۳۷۵۱۵-۱۳۹
- چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
- سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ اول ۱۳۹۵

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۶۸۲-۸

ISBN: 978-964-05-2682-8



جوان‌ها قدر جوانی‌شان
را بدانند و آن را در علم و
تقوا و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی
«قدس سره الشریف»

فهرست

۱	مجموعه، الگو و دنباله	فصل ۱
۲۹	مثلثات	فصل ۲
۵۷	توان‌های گویا و عبارت‌های جبری	فصل ۳
۷۱	معادله‌ها و نامعادله‌ها	فصل ۴
۹۳	تابع	فصل ۵
۱۰۵	شمارش، بدون شمردن	فصل ۶
۱۱۷	آمار و احتمال	فصل ۷

فصل ١

مجموعه، الگو و دنباله

رویکرد کلی کتاب

روح کلی حاکم بر این فصل و همین‌طور سایر فصل‌های کتاب آن است که دانش‌آموز خود در فرایند ساخت دانش درگیر شود. هیچ فرمول آماده‌ای به‌طور مستقیم عرضه نشده است؛ بلکه فعالیت‌ها طرّاحی شده‌اند که دانش‌آموزان عزیز با انجام آنها، خودشان به فرمول یا رابطه مورد نظر دست یابند. در تألیف کتاب سعی شده است علاوه بر استانداردهای محتوایی، تا حد امکان استانداردهای فرایندی زیر نیز در کانون توجه باشند:

۱ مسائل باز پاسخ: در بخش‌های مختلف هر درس، یعنی «فعالیت»، «کار در کلاس» و «تمرین»ها تکالیفی یافت می‌شوند که جواب منحصر به فرد ندارند. ممکن است به تعداد تمام دانش‌آموزان برای چنین سوآلی پاسخ وجود داشته باشد و همگی آنها نیز درست باشند.

۲ حل مسئله و طرح مسئله: علاوه بر اینکه در قسمت‌های مختلف کتاب، مسائلی برای حل دانش‌آموزان وجود دارد، همچنین در موارد مختلفی از دانش‌آموزان خواسته شده است که خودشان مسائلی را در موضوع مورد بحث طرح نمایند.

۳ ارتباط و اتصال موضوعی: مطالب ارائه شده در این کتاب، علاوه بر آنکه با کتاب ریاضی سال نهم مرتبط است و در ادامه مطالب آن می‌باشد. همچنین کتاب حاضر ارتباطاتی با سایر دروس دانش‌آموزان هم برقرار کرده است. در جاهای مختلف کتاب می‌توان مطالبی درباره جغرافیا، فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، تاریخ و دیگر دروس یافت که مفاهیم ریاضی در بستر این موضوعات طرح شده‌اند.

۴ بازنمایی‌های چندگانه: بسیاری از مفاهیم ریاضی را می‌توان از منظرهای مختلفی مورد توجه قرار داد. به عنوان مثال، تابع را می‌توان از دیدگاه مجموعه‌ای، نموداری، جدولی و ... مورد مطالعه قرار داد. این مطلب که دانش‌آموز بتواند از چندین زاویه مختلف یک مفهوم ریاضی را ببیند و بتواند بین بازنمایی‌های مختلف حرکت کند، نشان‌دهنده قوت آموزش و معنادار بودن یادگیری او خواهد بود. این موضوع در کتاب حاضر مورد توجه بوده و به عنوان مثال، یک مفهوم خاص ریاضی، هم از منظر جبری و هم از دیدگاه هندسی مورد بررسی واقع شده است.

۵ توجه به بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان: در سال‌های اخیر، تحقیقات فراوانی بر روی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ریاضیات صورت گرفته است. اشتباهی که ناشی از بدفهمی دانش‌آموز نسبت به موضوع باشد، نمی‌تواند ناشی از خطای محاسباتی، خستگی دانش‌آموز یا بی‌دقتی او باشد؛ بلکه چنین اشتباهی معمولاً در نتیجه یک قانون غلط است که در ذهن دانش‌آموز وجود دارد. به همین دلیل است که به این گونه اشتباهات، اشتباهات نظام‌دار نیز گفته می‌شود.

نخستین گام برای از بین بردن یا حداقل کاهش دادن این بدفهمی ها آن است که آنها را شناسایی کنیم و فراگیر بودن آنها در بین دانش آموزان را به رسمیت بشناسیم. در گام بعدی باید شرایطی را برای دانش آموز فراهم کنیم که او در مواجهه با تکالیف و موارد مناسب بتواند قانون غلط موجود در ذهن خود را حذف، جایگزین، یا اصلاح نماید. چنین ملاحظاتی در بخش های مختلف کتاب مد نظر بوده است؛ به این صورت که بدفهمی های رایج برجسته شده اند تا در تقابل با شکل درست آنها موجب تأمل و تفکر دانش آموز گردند.

۶ گفتمان ریاضی: در یک تدریس، هر چقدر بتوان دانش آموزان را به صحبت کردن و بحث نمودن وادار کرد، آن تدریس اثربخش تر خواهد بود. این مطلب که دانش آموزان نظرات دوستان خود را مورد نقد قرار دهند، یا اینکه بتوانند از نظرات خودشان در مقابل دیگران به طور مستدل و منطقی دفاع کنند، یکی از اهداف مهم آموزش ریاضی است. در قسمت های مختلف این کتاب، از دانش آموزان خواسته شده است تا با دوستان خود در موضوعات مورد نظر و از آن جمله در مورد مسائل باز پاسخ بحث کنند و جواب های خود را با یکدیگر مقایسه کنند. طبیعی است که هدایت این بحث ها و گفتمان ریاضی بر عهدهٔ معلمان عزیز خواهد بود.

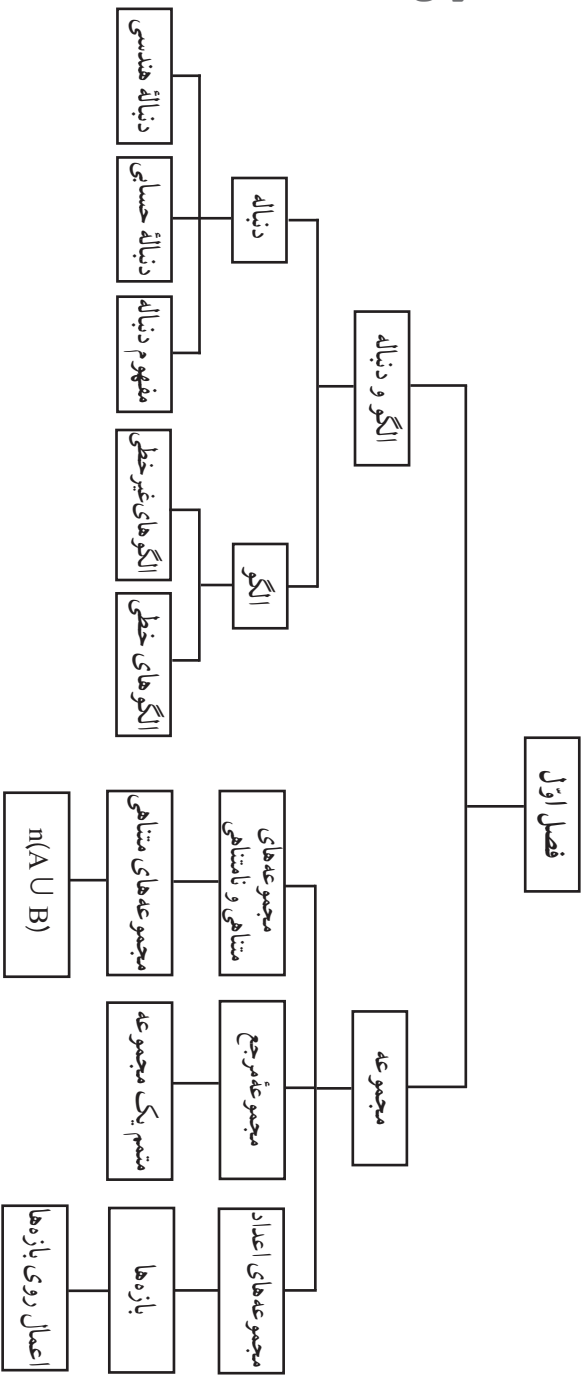
۷ اثبات و استدلال: اثبات و استدلال بخش جدانشدنی از آموزش ریاضی هستند. در اینجا به هیچ وجه تأکید بر اثبات صوری نیست و بیشتر استدلال شهودی مد نظر است. هدف دیگر آن است که دانش آموزان ضرورت اثبات و استدلال برای یک حکم ریاضی را درک نمایند.

نگاه کلی به فصل

دانش آموزان در کلاس نهم برای اولین بار با مفهوم مجموعه آشنا شده اند. در فصل های بعدی کتاب حاضر، مطالبی از مفهوم مجموعه مورد نظر است که در کتاب نهم به آنها پرداخته نشده است؛ لذا دو درس اول فصل حاضر، به این پیش نیازها اختصاص دارد. مطالبی مانند بازه های اعداد حقیقی، مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه، مجموعه های متناهی و نامتناهی و همچنین اصل شمول و عدم شمول در این دو درس مورد بحث واقع شده اند.

دو درس بعدی این فصل، در ارتباط با مفهوم الگو و دنباله است. الگویابی و الگوسازی، موضوعاتی هستند که دانش آموزان از کلاس اول ابتدایی با آنها سر و کار داشته اند. در واقع درس سوم در ادامهٔ مطالبی است که دانش آموزان در پایه های قبل در این زمینه مطالعه کرده اند. دنباله هم در انتهای درس سوم مطرح شده است و درس چهارم به دنباله های حسابی و هندسی اختصاص دارد.

نقشه مفهومی



نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

- (الف) مجموعه اعضای خانواده شما
 (ب) مجموعه نقاط روی محور x ها
 (پ) مجموعه مثلث‌های قائم‌الزاویه
 (ت) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
 (ج) بازه $(\frac{1}{10}, \frac{2}{10})$
 (ح) مجموعه جواب‌های حقیقی معادله $2x - 1 = 0$
 (خ) مجموعه شماره‌های طبیعی عدد ۴۸

۲ مثال‌هایی برای مجموعه‌های خواسته شده ارائه کنید.

- (الف) یک مجموعه غیر عددی متناهی
 (ب) یک مجموعه عددی نامتناهی
 (الف) A و B را با نمایش اعضای آنها بنویسید.
 (ب) یک مجموعه غیر عددی متناهی
 (ت) یک مجموعه عددی نامتناهی
 ۳ فرض کنیم \mathbb{N} مجموعه مرجع باشد و $A = \{3n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{3n - 2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(الف) A و B را با نمایش اعضای آنها بنویسید.

(ب) A' و B' را مشخص کنید.

(پ) $(A \cup B)'$ را ابتدا با نمایش اعضای آن و سپس با بیان ویژگی مشترک اعضای آن بنویسید.

(ت) $(A \cap B)'$ را ابتدا با نمایش اعضای آن و سپس با بیان ویژگی مشترک اعضای آن بنویسید.

۴ مجموعه‌های خواسته شده را با هاشور زدن در نمودار ون مشخص کنید.

(الف) $(A \cap B)'$ (ب) $A' \cup B'$ (پ) $A - B$ (ت) $A \cap B'$

۵ فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ مجموعه مرجع بوده و A و B و C به ترتیب، مجموعه شامل عددهای اول، مضرب‌های ۳ و اعداد یک رقمی از U باشند.

(الف) A و B و C را با نمایش اعضای هر یک از آنها مشخص کنید.

(ب) $A - B$ و $A \cap B'$ را مشخص کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶ برای مجموعه زیر، دو مجموعه مرجع دلخواه بنویسید و در هر حالت، متمم A را مشخص کنید.

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

۷ در پرتاب یک تاس، مجموعه شامل تمام حالت‌های ممکن در مورد عدد رو شده را بنویسید.

آیا این مجموعه را می‌توان به عنوان یک مجموعه مرجع در نظر گرفت؟

۸ اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، مطلوب است متمم هر یک از مجموعه‌های زیر:

$$(الف) A = [5, +\infty) \quad (ب) B = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$$

۹ دو مجموعه متناهی دلخواه مثل A و B مثال بزنید و درستی رابطه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ را برای آنها بررسی کنید.

۱۰ در یک نظرسنجی از ۸۰ خانواده، اطلاعات زیر حاصل شده است:

– ۲۰ خانواده فقط کامپیوتر شخصی دارند،

– ۳۵ خانواده فقط لپ تاپ دارند،

– ۱۰ خانواده نه کامپیوتر شخصی دارند و نه لپ تاپ.

چه تعدادی از این خانواده‌ها هم دارای کامپیوتر شخصی هستند و هم لپ تاپ؟
۱۱ شکل‌های زیر را در نظر بگیرید.



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

الف) در شکل چهلم چند دایره وجود دارد؟

ب) در شکل n ام چند دایره وجود دارد؟

پ) آیا حالتی وجود دارد که شامل ۵۵ دایره باشد؟ اگر هست، شماره آن شکل چند است؟

۱۲ شکل زیر را در نظر بگیرید.

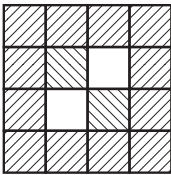
الف) مربع ۱۰×۱۰ شامل چند کاشی تیره خواهد بود؟

ب) مربع ۱۰۰×۱۰۰ شامل چند کاشی تیره خواهد بود؟

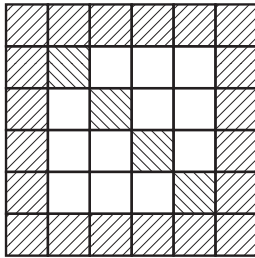
پ) مربع $n \times n$ شامل چند کاشی تیره خواهد بود؟ ($n \geq ۴$)

ت) آیا مربعی هست که در آن ۹۴ کاشی تیره به کار رفته باشد؟ اگر هست، ابعاد آن را بیابید.

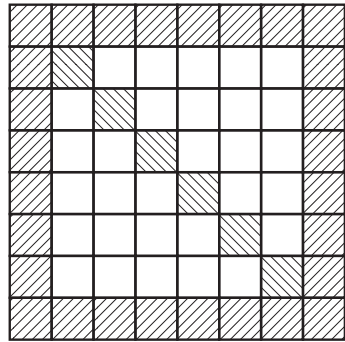
ث) آیا الگوی حاصل یک الگوی خطی است؟ چرا؟



مربع ۴×۴ دارای ۱۴ کاشی تیره

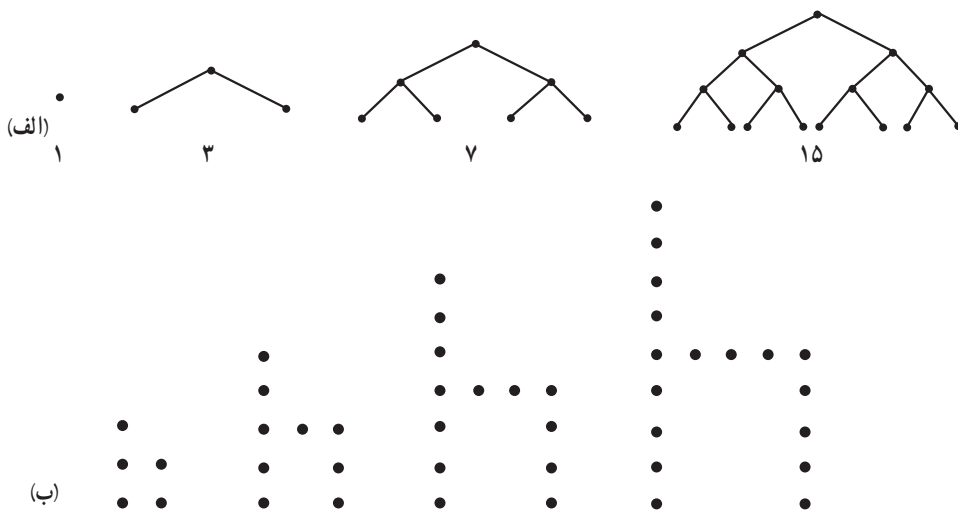


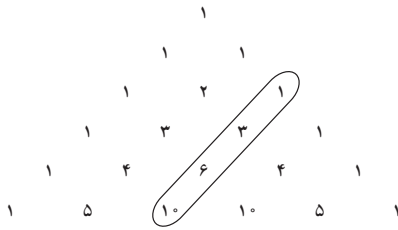
مربع ۶×۶ دارای ۲۴ کاشی تیره



مربع ۸×۸ دارای ۳۴ کاشی تیره

۱۳ در الگوهای زیر، جمله n ام را به دست آورید.





۱۷ الف) الگوی به کار رفته در مثلث زیر را توضیح دهید.

ب) یک دنباله را در این مثلث مشخص کرده‌ایم (دنباله اعداد مثلثی). شما سه دنباله دلخواه دیگر را مشخص نمایید.

.....

۱۸ الگوی زیر را در نظر بگیرید.

$$1^2 + 1 = 2^2 - 2$$

$$2^2 + 2 = 3^2 - 3$$

$$3^2 + 3 = 4^2 - 4$$

$$4^2 + 4 = 5^2 - 5$$

.....

الف) دو سطر بعدی را در این الگو بنویسید. آیا تساوی‌ها برقرارند؟

ب) سطر n ام این الگو را با نمادهای جبری بنویسید و درستی آن را ثابت کنید.

۱۹ در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید و جمله عمومی را بیابید.

... و ۳۸ و ۲۳ و ۱۲ و ۵ (الف)

... و ۶۱ و ۴۲ و ۲۷ و ۱۶ (ب)

... و ۲۰ و ۱۲ و ۶ و ۲ و ۰ (پ)

... و ۲۴ و ۱۵ و ۸ و ۳ و ۰ (ت)

... و ۲۶ و ۱۷ و ۱۰ و ۵ و ۲ (ث)

۲۰ دنباله زیر را در نظر بگیرید.

-۷، ۱، ۹، ۱۷، ۲۵، ...

الف) جمله پنجاهم آن را محاسبه کنید.

ب) چندمین جمله آن برابر ۷۹۳ است؟

۲۱ جملات پنجم و نهم یک دنباله حسابی به ترتیب ۳۰ و ۵۸ هستند. جمله چندم این دنباله عدد ۱۰۰ است؟

۲۲ در یک دنباله حسابی جمله اول عدد ۱ است. قدر نسبت آن را طوری بیابید که جمله دهم دنباله، برابر

عدد 100° شود.

۲۳ اگر a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند؛ یعنی b واسطه حسابی بین a و c باشد، آن گاه مقدار b را بر حسب a و c به دست آورید.

۲۴ اگر $\frac{x}{y}$ ، $x+2$ و $2x-11$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، x را بیابید.

۲۵ بین ۹ و ۶۱ سه واسطه حسابی درج کنید.

۲۶ در یک دنباله حسابی $t_4 - t_1 = 14$ و $t_{13} + t_4 = 88$ می باشد. دنباله را مشخص کنید.

۲۷ مجموع زوایای داخلی مثلث 180° ، چهارضلعی 360° ، پنج ضلعی 540° می باشد. اگر این الگو با همین روند ادامه پیدا کند، (الف) مجموع زوایای داخلی یک ۱۲ ضلعی چند درجه خواهد بود؟
(ب) مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی چند درجه است؟

۲۸ اگر زاویه های یک مثلث تشکیل دنباله حسابی دهند، ثابت کنید که یکی از زاویه های آن باید 60° باشد.

۲۹ زاویه های یک پنج ضلعی محدب تشکیل دنباله حسابی می دهند.

(الف) اگر زاویه ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، زاویه وسط چند درجه است؟

(ب) اگر کوچک ترین زاویه 40° درجه باشد، اندازه سایر زاویه ها را به دست آورید.

۳۰ در ردیف اول یک استادیوم ورزشی ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۹ و در ردیف سوم ۲۳ صندلی می باشد. اگر تعداد صندلی ها به همین منوال افزایش یابد، در ردیف ۲۵ چند صندلی وجود خواهد داشت؟

۳۱ دنباله هندسی مقابل را در نظر بگیرید.

(الف) جمله یازدهم آن را به دست آورید.

(ب) چندمین جمله آن برابر $\frac{3}{456}$ می باشد؟

۳۲ جمله چندم دنباله زیر برابر 1024 می باشد؟

۳۳ در یک دنباله هندسی حاصل ضرب سه جمله اول برابر ۲۷ و مجموع آنها برابر ۱۳ می باشد. دنباله را

مشخص کنید. مسئله چند جواب دارد؟

۳۴ یک دنباله هندسی بنویسید که در آن هر دو جمله متوالی قرینه یکدیگر باشند.

۳۵ (الف) یک دنباله هندسی دلخواه بنویسید و قدر نسبت آن را مشخص نمایید.

(ب) تمام جملات دنباله مذکور را معکوس کنید و نشان دهید که دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.

(پ) قدر نسبت دنباله حاصل چه ارتباطی با قدر نسبت دنباله اصلی دارد؟

(ت) به طور کلی اگر a ، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، ثابت کنید اعداد $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ نیز

تشکیل دنباله هندسی می دهند.

۳۶ (الف) دو دنباله هندسی دلخواه مثال بزنید.

ب) نشان دهید حاصل $\frac{t_3 t_9}{t_6^2}$ در مورد جملات هر کدام از دنباله‌های فوق برابر ۱ می‌باشد.

پ) برای یک دنباله هندسی در حالت کلی ثابت کنید $t_3 t_9 = t_6^2$

ت) آیا می‌توانید حالت کلی تری از این رابطه را نوشته و آن را ثابت کنید؟

۳۷ فرض کنید آب یک استخر در هر ساعت ده درصد گرم‌تر شود. اگر دمای فعلی آب 5° درجه باشد، پس از هشت ساعت دمای آن چند درجه خواهد بود؟

۳۸ شهری ۱۰۰۰۰۰۰ نفر جمعیت دارد. فرض کنید نرخ رشد جمعیت در این شهر سه درصد باشد.

الف) جمعیت این شهر را پس از گذشت یک، دو، سه، چهار و پنج سال پیش‌بینی کنید و در یک جدول بنویسید.

ب) اگر نرخ رشد سه درصد برای جمعیت این شهر ثابت بماند، پس از گذشت n سال، جمعیت شهر از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پ) هر گاه جمعیت این شهر را در سال‌های متوالی بنویسیم، دنباله حاصل چه نوع دنباله‌ای خواهد بود؟

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

اهداف

- یادآوری مختصر از مجموعه‌های مختلف اعداد
- آشنایی با مفهوم بازه‌های اعداد حقیقی و اعمال بر روی آنها
- آشنایی با مفهوم مجموعه متناهی و مجموعه نامتناهی

روش تدریس

این درس با یادآوری مجموعه‌های اعداد شروع شده است که دانش‌آموزان از سال‌های قبل با آنها آشنا هستند. کار در کلاس صفحه ۲ با همین هدف طراحی شده است. توصیه می‌شود فرصت کافی در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد تا آنها با پرداختن به قسمت‌های مختلف این «کاردر کلاس» بتوانند مطالب گذشته را به یاد آورند.

بازه‌ها اولین موضوع جدیدی است که در کتاب آمده است و آموزش آن باید متکی بر فعالیت دانش‌آموز باشد. در ابتدای مبحث از دانش‌آموزان خواسته شده است که اعضای یک مجموعه (جواب یک نامعادله) را روی محور با رنگ کردن مشخص نمایند. حتی تعریف بازه‌ها نیز در فعالیت‌های صفحه ۳ و ۴ بر عهده دانش‌آموزان گذاشته شده است. بعد از یک مثال حل شده، در «کار در کلاس» صفحه ۵ تکالیف متنوعی آمده است که دانش‌آموزان باید در کلاس انجام دهند.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی پس از انجام یک فعالیت توسط دانش‌آموزان تعریف شده است. سپس در کار در کلاس صفحه ۶ مثال‌های متنوعی از مجموعه‌ها آمده است که باید دانش‌آموزان متناهی یا نامتناهی بودن آنها را مشخص کنند. این قسمت ظرفیت آن را دارد که دانش‌آموزان در مورد مثال‌های طرح شده پژوهش‌هایی را انجام دهند و در کلاس ارائه نمایند؛ نمونه‌هایی از آن در حاشیه‌های صفحه ۶ و ۷ آمده است. به علاوه برخی از سؤالات باز پاسخ هم در این قسمت آمده است. با انجام فعالیت صفحه ۷، دانش‌آموزان به نامتناهی بودن Q و برخی زیرمجموعه‌های آن براساس آنچه در کلاس نهم یاد گرفته‌اند، پی می‌برند.

متمم یک مجموعه

اهداف

- معرفی مفهوم مجموعه مرجع
- معرفی مفهوم متمم یک مجموعه
- آشنایی با مفهوم دو مجموعه جدا از هم
- آشنایی با اصل شمول و عدم شمول

روش تدریس

این درس با یک مثال ملموس از دنیای واقعی آغاز می‌شود و با بحث در مورد مجموعه کتاب‌های خطی و مجموعه کتاب‌های چاپی یک کتابخانه، مفاهیمی مثل مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه معرفی می‌شود. توصیه می‌شود در کلاس از دانش‌آموزان خواسته شود تا مثال‌های دیگری از این دست ارائه کنند. در فعالیت صفحه ۸، نقش مجموعه مرجع در معرفی یک مجموعه برجسته شده است. در کار در کلاس صفحه ۹ مثال‌های گوناگونی از دنیای واقعی و ریاضی وجود دارد که دانش‌آموزان با انجام آنها می‌توانند مفهوم مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه را بهتر درک کنند و به نتایج جدیدی هم برسند.

در مورد تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه متناهی، فعالیت در صفحه ۱۰ آمده است. در گام اول، دانش‌آموزان حاصل $n(A \cup B)$ را برای دو مجموعه جدا از هم محاسبه می‌کنند. در قسمت دوم، حاصل آن را در حالت کلی به دست می‌آورند و سپس در کار در کلاس صفحه ۱۱ از آنها خواسته می‌شود تا مثال‌های مختلفی را در این زمینه حل کنند. نکته مهم آن است که در این مثال‌ها هم کاربرد فرمول دیده می‌شود و هم استفاده از نمودار ون. در واقع این دو ابزار، هیچ‌کدام بر دیگری ارجحیت ندارند و در این درس، از هر دو روش استفاده شده است. در قسمت سوم «کار در کلاس» مورد بحث، دانش‌آموزان به کمک مثال و نمودار ون به طور شهودی به این نتیجه می‌رسند که اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B' \subseteq A'$ خواهد بود.

توصیه آموزشی

دانش‌آموزان را محدود و مجبور به استفاده از روشی خاص در حل تکالیف نکنیم و به آنها اجازه دهیم تا روش حل مورد علاقه خود را به کار برند.

الگو و دنباله

درس سوم

اهداف

- آشنایی با متغیرهای اندیس‌دار
- توانایی تعمیم در الگوهای مختلف
- توانایی تشخیص الگوهای خطی و غیرخطی
- آشنایی با مفهوم دنباله‌اعداد
- ارتقای تفکر تصویری
- مرتبط کردن الگوهای هندسی و عددی به یکدیگر

روش تدریس

برای مبحث الگو، مقدمه‌ای در حاشیه صفحه ۱۴ آمده و در آنجا تعریفی از الگو داده شده است. درس با یک مثال از الگویی آشنا برای دانش‌آموزان آغاز می‌شود. دو هدف برای این مثال مورد نظر است. اول آنکه در حین حل این مثال، دانش‌آموزان با متغیرهای اندیس‌دار آشنا شوند؛ چرا که در ادامه موضوع از این نمادگذاری با هدف سهولت کار استفاده شده است. دوم اینکه دانش‌آموزان توانایی تعمیم پیدا کنند و بتوانند

جمله عمومی برخی الگوها را به دست آورند. در اینجا نیز تأکید بر راه حل های چندگانه است و دانش آموزان آزادند تا از هر روشی دست به تعمیم زده و جمله عمومی را بیابند.

در صفحه ۱۶ الگوی خطی تعریف می شود و علت نام گذاری آنها با این اسم نیز به اندازه ای توضیح داده می شود که این موضوع به کتاب ریاضی نهم و قسمت معادله خط از آن کتاب متصل شود. پس از آن با ارائه یک مثال حل شده به کار در کلاس صفحه ۱۷ می رسیم که در آن یک الگوی خطی مورد کنکاش قرار می گیرد.

مثال های ارائه شده در مورد الگوهای غیرخطی این درس، همگی مربوط به الگوهای درجه دوم هستند. این بخش با فعالیت صفحه ۱۷ آغاز می شود که در آن یک الگوی هندسی غیرخطی از دو زاویه مورد توجه قرار گرفته و جمله عمومی آن به دست می آید.

مفهوم دنباله در انتهای این درس ارائه شده و در کاردر کلاس صفحه ۱۹ تقریباً به تفصیل به آن پرداخته شده است. در اینجا دنباله های متنوعی ذکر شده است تا دانش آموزان جملات بعدی آنها را بنویسند و در برخی موارد جمله عمومی دنباله ها را حدس بزنند. در پایان این درس، دانش آموزان فرمول مجموع $1+2+3+\dots+n$ را به دست می آورند.

در تمرین های این درس، هم الگوهای خطی و هم الگوهای غیرخطی دیده می شوند. در مورد تمرین های ۳ و ۴ صفحه ۲۰ که در آنها خواسته شده است تا به دنباله های داده شده الگوهای هندسی مناسبی نظیر شوند، احتمالاً دانش آموزان، نیازمند کمک معلم باشند؛ زیرا در متن درس، عکس این روند مورد توجه بوده است.

توصیه آموزشی

کار حل یک مسئله نباید با به دست آمدن جواب آخر آن تمام شده تلقی گردد. بهتر است دانش آموزان بیاموزند که درستی جواب حاصل را بررسی نمایند. همان طور که در مثال حل شده صفحه ۱۶ این کار انجام پذیرفته است. در این مثال، پس از به دست آمدن جمله اول و قدر نسبت دنباله، جملات دنباله نوشته شده اند تا دانش آموزان به وضوح ببینند که جمله چهارم و دهم دنباله همان گونه که در فرض مسئله آمده بود به ترتیب ۱۷ و ۴۱ هستند.

دنباله‌های حسابی و هندسی

درس چهارم

اهداف

- تشخیص و شناسایی دنباله‌های حسابی
- به دست آوردن جمله عمومی دنباله حسابی
- تشخیص ارتباط بین الگوهای خطی و دنباله‌های حسابی
- آشنایی با دنباله هندسی
- به دست آوردن جمله عمومی دنباله هندسی
- یافتن نمونه‌هایی از دنباله‌های حسابی و هندسی در برخی پدیده‌های دنیای واقعی

روش تدریس

درس با ایجاد ارتباط با درس قبل آغاز می‌شود. به این معنا که الگوهای خطی که دانش‌آموزان در درس سوم با آنها آشنا شده‌اند، در این درس دنباله حسابی نامیده شده است. در فعالیت صفحه ۲۱ که مربوط به سال‌های برگزاری مسابقات المپیک در هزاره سوم میلادی می‌باشد، دانش‌آموزان هدایت می‌شوند تا به ساختار جمله عمومی دنباله حسابی در حالت کلی دست یابند.

کار در کلاس صفحه ۲۲ شامل مثال‌های مختلفی از دنباله حسابی است تا دانش‌آموزان در به دست آوردن قدر نسبت و جمله عمومی دنباله‌های حسابی کاملاً ورزیده شوند. نکته حائز اهمیت در اینجا آن است که به ارتباط بین دنباله‌های حسابی و الگوهای خطی تأکید گردد؛ به این معنا که مثلاً در یافتن جمله عمومی دنباله‌ای مثل $۵, ۹, ۱۳, ۱۷, \dots$ وقتی دانش‌آموز تشخیص می‌دهد که قدرنسبت برابر ۴ است، باید بلافاصله نتیجه بگیرد که جمله عمومی آن به شکل $t_n = 4n + \square$ می‌باشد و با مقایسه آن با جمله اول دنباله به راحتی به جواب $t_n = 4n + 1$ دست یابد. به عبارت دیگر لزومی ندارد که دانش‌آموز را مجبور کنیم تا حتماً از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی یعنی $t_n = t_1 + (n-1)d$ استفاده کند. این مطلب در مثال ابتدای

صفحه ۲۳ نیز مورد توجه بوده است و مثال مزبور به هر دو روش، حل شده است تا دانش‌آموزان روش مطلوب خود را برگزینند.

همچنین در صفحه ۲۲ یک مثال کاربردی در ارتباط با انتخاب اپراتور تلفن همراه مناسب آمده است که توصیه می‌شود در تدریس روزانه خود مثال‌هایی از این دست، سهم بیشتری داشته باشند؛ چرا که این‌گونه مثال‌ها برای دانش‌آموزان ملموس‌ترند و به همین دلیل آنها مفاهیم ریاضی نهفته در این مثال‌ها را بهتر فرا می‌گیرند.

کار در کلاس صفحه ۲۳ به واسطهٔ حسابی مربوط می‌شود که این موضوع با مثال‌های متعددی شرح داده شده است. بسیاری از پژوهشگران معتقدند که توجه دادن دانش‌آموزان به ریشه‌های تاریخی مفاهیم ریاضی، می‌تواند انگیزهٔ آنها را در مطالعهٔ این مفاهیم افزایش دهد. در این راستا تمرین ۶ صفحه ۲۴، از پایروس رایند انتخاب شده است.

دنبالهٔ هندسی نیز با یک مسئلهٔ روزمره؛ یعنی نحوهٔ انتشار ویروس آنفلوآنزا آغاز می‌شود و دانش‌آموزان در طی فعالیت صفحه ۲۵ به ساختار جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی دست می‌یابند. کار در کلاس صفحه ۲۶ از یک طرف به برخی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد دنبالهٔ هندسی پرداخته است و از طرف دیگر به موضوع نحوهٔ درج واسطهٔ هندسی بین دو عدد.

تمرین‌های صفحه ۲۷ نیز متنوع اند. به عنوان مثال، تمرین ۷ این صفحه در ارتباط با تعداد تلفات جاده‌ای کشور است که با وجود میزان بالای آن خوشبختانه در یک دههٔ گذشته سیر نزولی داشته است. توصیه می‌شود دانش‌آموزان تشویق شوند تا با دقت در پیرامون خود، چنین مسائلی را که مرتبط با مفاهیم درسی آنهاست بیابند و در کلاس طرح نمایند.

حل تمرین‌های صفحه ۷

۱ فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$$V = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

U یک مجموعه نامتناهی است.

پ) یک زیر مجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

زیر مجموعه‌های مختلفی می‌توان ارائه کرد؛ به عنوان مثال: $A = \{10, 20, 40, 100\}$

ت) دو زیر مجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید، به طوری که $C \subseteq D$

مثال‌های مختلفی می‌توان نوشت از جمله:

$$C = \{2^0, 4^0, 6^0, 8^0, \dots\}$$

$$D = \{1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \dots\}$$

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی

ب) مجموعه شماره‌های طبیعی عدد ۳۶. متناهی

پ) بازه $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. نامتناهی

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$ در واقع A برابر مجموعه تهی و لذا متناهی است.

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی.

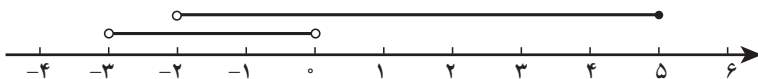
۳ دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

مجموعه‌های متفاوتی می‌توان مثال زد: مانند $\{1\} = [1, +\infty) \cap [0, 1]$

۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

با توجه به شکل

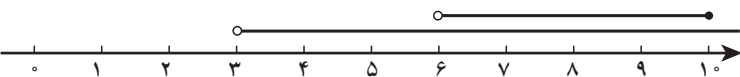
$$(-3, 0) \cap (-2, 5] = (-3, 0]$$



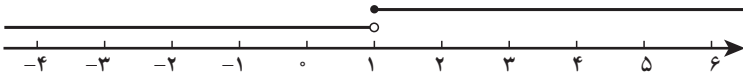
$$(-\infty, 6] \cap (2, 9) = (2, 6]$$



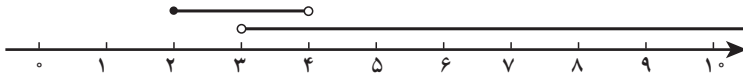
$$(3, +\infty) \cap (6, 10] = (6, 10]$$



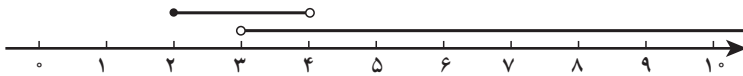
ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}$



ث) $(3, +\infty) - [2, 4) = [4, +\infty)$

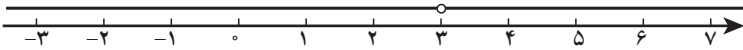


ج) $[2, 4) - (3, +\infty) = [2, 3]$



۵ مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

$$\mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$



۶ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن گاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ A مجموعه‌ای

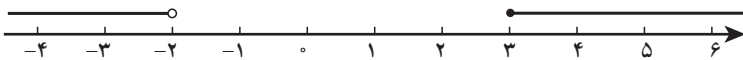
متناهی خواهد بود.

حل تمرین‌های صفحه ۱۲

۱ \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی

محور نشان دهید.

الف) $A = [-2, 3) \Rightarrow A' = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$



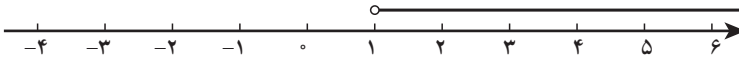
ب) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow B = \mathbb{R} - \mathbb{W}$



پ) $C = (0, +\infty) \Rightarrow C' = (-\infty, 0]$



ت) $D = (-\infty, 1] \Rightarrow D' = (1, +\infty)$



۲ \mathbb{N} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

مثال‌های مختلفی می‌توان ارائه کرد؛ به عنوان مثال:

$$A = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \Rightarrow A' = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

$$B = \{5, 6, 7, 8, 9, \dots\} \Rightarrow B' = \{1, 2, 3, 4\}$$

مثال‌های زیادی وجود دارد؛ مثلاً:

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

هر زیر مجموعه متناهی و دلخواه از \mathbb{N} مانند C را در نظر بگیریم حتماً C' نامتناهی خواهد شد. به

عنوان نمونه

$$C = \{1, 2, 3, \dots, 1000000\} \Rightarrow C' = \{1000001, 1000002, 1000003, \dots\}$$

۳ اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$$

روش دوم: استفاده از نمودار ون

۴ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ،

$$n(B) = 40 \text{ و } n(A \cap B) = 20 \text{ مطلوب است محاسبه عبارت‌های زیر:}$$

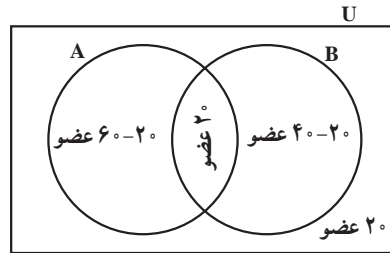
در نمودار ون، دو مجموعه A و B سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم می‌کنند. اگر از ناحیه

مربوط به $A \cap B$ شروع کنیم و عدد مربوط به آن را که 20 می‌باشد بنویسیم، نمودار زیر را خواهیم داشت

که به کمک آن می‌توان جواب تمام قسمت‌های این تمرین را به دست آورد.

الف) $n(A \cup B) = 40 + 20 + 20 = 80$

ب) $n(A \cap B') = 60 - 20 = 40$



پ) $n(A' \cap B) = 40 - 20 = 20$

ت) $n(A' \cap B') = 20$

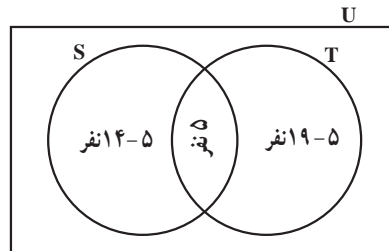
روش دوم: استفاده از فرمول

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است (الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند. (ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

الف) $n(S - T) = n(S) - n(S \cap T) = 14 - 5 = 9$

ب) $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$
 $= 14 + 19 - 5$
 $= 28$

$n[(S \cup T)'] = 31 - 28 = 3$



۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۷۵ نفر شان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت، از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند؟

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟

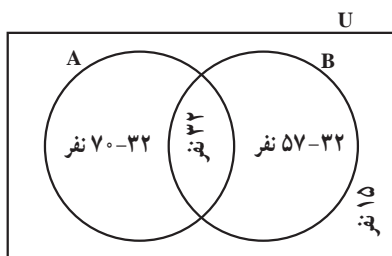
در نمودار ون با شروع از قسمت $(A \cap B)$ و نوشتن تعداد عضوهای هر قسمت، نمودار زیر به دست می‌آید که به کمک آن می‌توان به تمام قسمت‌های تمرین پاسخ داد.

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 70 + 57 - 32 = 95$

ب) $n(A - B) = 70 - 32 = 38$

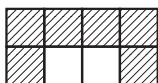
پ) $n(A - B) + n(B - A) = (70 - 32) + (57 - 32) = 38 + 25 = 63$

ت) $n[(A \cup B)'] = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$

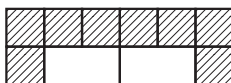


حل تمرین‌های صفحه ۲۰

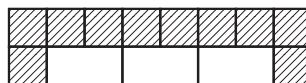
۱ به الگوی زیر توجه کنید.



۶ کاشی تیره، ۱ کاشی سفید



۸ کاشی تیره، ۲ کاشی سفید



۱۰ کاشی تیره، ۳ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره را در هر مرحله به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

ث) آیا در این الگو، شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست تعداد کاشی‌های سفید

آن چندتاست؟

الف) ۱۲ کاشی تیره

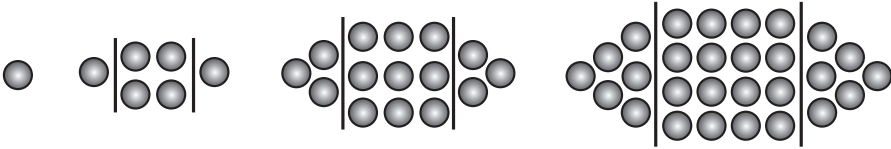
ب) ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶

پ) $t_n = 2n + 4$

ت) $t_{100} = 2(100) + 4 = 204$

ث) $t_5 = 50 \rightarrow 2n + 4 = 50 \rightarrow 2n = 46 \rightarrow n = 23$

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



۱ نقطه

۶ نقطه

۱۵ نقطه

شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

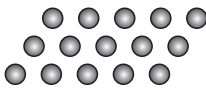
الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

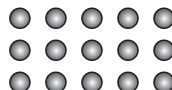
پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

الف) ۱, ۶, ۱۵, ۲۸, ۴۵, ۶۶, ...

ب) مثلاً شکل (۳) را می توان به صورت زیر تبدیل کرد.



معادل شکل (۳)



معادل شکل (۴)

$$t_3 = 3(3 + 2)$$

$$t_4 = 4(4 + 3)$$

$$t_5 = 5(5 + 4)$$

.....

با ادامه این روند، خواهیم داشت :

$$t_n = n[n + (n - 1)]$$

$$t_n = n(2n - 1)$$

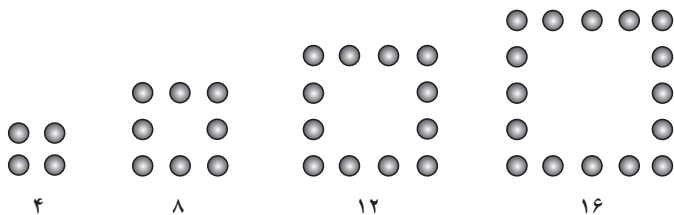
$$t_n = 2n^2 - n$$

روش دوم ب: هر شکل مجموع یک عدد مربعی و دو برابر عدد مثلی ماقبل آن است.

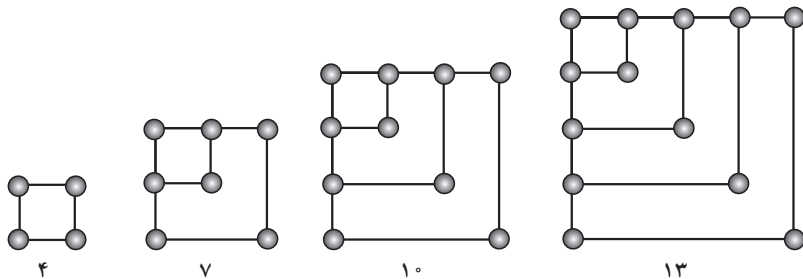
پ) $t_{10} = 2(10)^2 - 10 = 190$

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

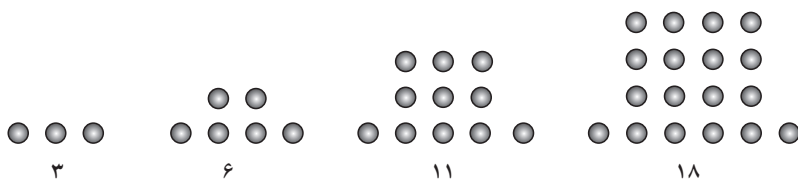
الف) $a_n = 4n$



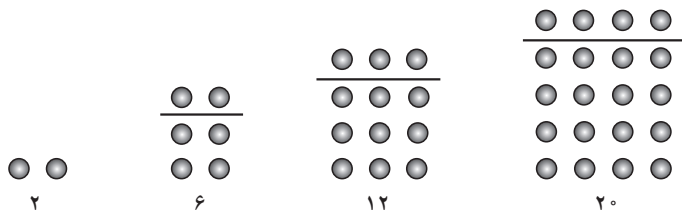
ب) $b_n = 3n + 1$



پ) $c_n = n^2 + 2$

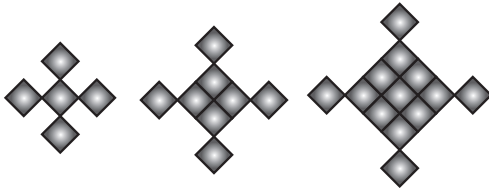


ت) $d_n = n^2 + n$



توجه: برای هر قسمت می توان الگوهای هندسی مختلفی ارائه کرد که موارد بالا به عنوان نمونه ارائه شده اند.

۴ برای دنباله های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن، جمله عمومی هر دنباله را بیابید.
 (الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots \Rightarrow (1+4), (4+4), (9+4), (16+4), \dots$



$$(1)^2 + 4$$

$$2^2 + 4$$

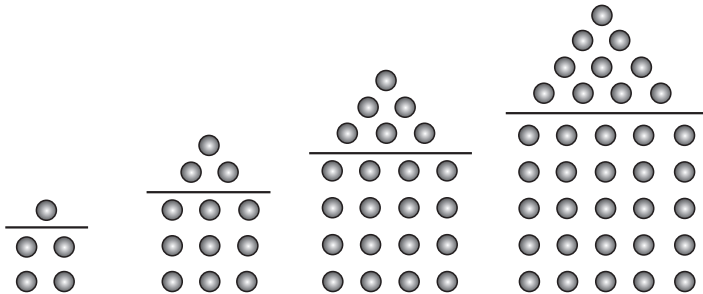
$$3^2 + 4 \dots \dots \dots$$

$$\Rightarrow t_n = n^2 + 4$$

در هر دو قسمت اگر هر جمله دنباله را به صورت مجموع یک عدد مربع کامل با عددی دیگر بنویسیم، جمله عمومی آن را می توانیم راحت تر بیابیم.

(ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

$\Rightarrow (4+1), (9+3), (16+6), (25+10), \dots$ (مجموع یک عدد مربعی و یک عدد مثلثی)



$$(1+1)^2 + 1$$

$$(3+1)^2 + 3$$

$$(6+1)^2 + 6$$

$$(4+1)^2 + 10 \Rightarrow t_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (n+1) \left[(n+1) + \frac{n}{2} \right]$$

$$t_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

حل تمرین های صفحه ۲۴

۱ از بین دنباله های زیر، دنباله های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت جمله بیست و یکم را بیابید.

(الف) $3, 10, 17, 24, \dots$ $t_{21} = t_1 + 20d = 3 + 20(7) = 143$

دنباله حسابی نیست $1, 2, 4, 8, \dots$ (ب)

پ) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$ $t_{21} = t_1 + 20d = \sqrt{3} + 20(\sqrt{3}) = 21\sqrt{3}$

ت) $10, 7, 4, 1, \dots$ $t_{21} = t_1 + 20d = 10 + 20(-3) = -50$

ث) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$ $t_{21} = t_1 + 20d = \frac{2}{5} + 20(\frac{1}{5}) = 4\frac{2}{5}$

ج) $2, 2, 2, 2, \dots$ $t_{21} = 2 \Rightarrow$ دنباله حسابی با قدرنسبت $d = 0$ می‌باشد

۲ در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب 20° و 56° است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

تفاضل

$$\begin{cases} t_3 = 20^\circ \\ t_7 = 56^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 20^\circ \\ t_1 + 6d = 56^\circ \end{cases} \Rightarrow 4d = 36 \rightarrow \boxed{d = 9}, \boxed{t_1 = 2}$$

دنباله $2, 11, \underset{t_3}{20}, 29, 38, 47, \underset{t_7}{56}, 65, \dots$

۳ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

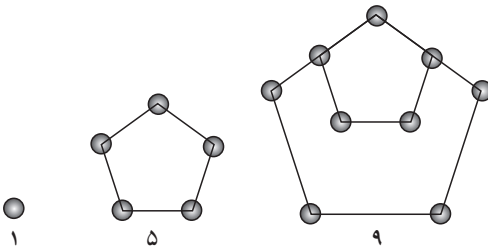
$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 3 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 3 \\ (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) = 39 \end{cases}$$

تفاضل

$$\begin{cases} 3t_1 + 3d = 3 \\ 3t_1 + 12d = 39 \end{cases} \Rightarrow 9d = 36 \Rightarrow \boxed{d = 4}, \boxed{t_1 = -3}$$

دنباله: $-3, 1, 5, 9, 13, 17$

۴ الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.
ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.



پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

دنباله حاصل یک دنباله حسابی است

الف) $1, 5, 9, 13, 17, \dots$

ب) $t_n = t_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(4) \Rightarrow t_n = 4n - 3$

پ) $t_n = 397 \Rightarrow 4n - 3 = 397 \Rightarrow 4n = 400 \Rightarrow n = 100$

۵ الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

ب) واسطه حسابی بین 2° و 3° چه عددی است؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $t_3 = 11 \Rightarrow \boxed{x}, 11, 5$ دنباله حسابی

$$t_1 + 2d = 11$$

$$5 + 2d = 11 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow x = 8$$

ب) $t_3 = 3^\circ \Rightarrow \boxed{x}, 3^\circ, 2^\circ$ دنباله حسابی

پ) واسطه حسابی بین دو عدد a و c برابر است با $\frac{a+c}{2}$.

۶ مسئله زیر در پایروس را بنده آمده است. آن را حل کنید.

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و

یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد».

مجموع برابر 100 $\rightarrow 5x = 100 \rightarrow x = 20$

سهم‌ها: $(x-2d), (x-d), x, (x+d), (x+2d)$

$$\frac{1}{3}[x + (x+d) + (x+2d)] = (x-2d) + (x-d) \rightarrow x+d = 2x-3d$$

$$\Rightarrow 4d = x \xrightarrow{x=20} d = 5 \Rightarrow \text{سهم‌ها } 10, 15, 20, 25, 30$$

حل تمرین‌های صفحه ۲۷

۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدرنسبت آنها را بنویسید.

الف) $r = 4$ دنباله هندسی است $7, 28, 112, 448, \dots$

ب) دنباله هندسی نیست $\Rightarrow \frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \neq \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

سهم‌ها: $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$

پ) $r = \frac{-1}{2}$ دنباله هندسی است $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$

ت) $r = 1$ دنباله هندسی است $5, 5, 5, 5, \dots$

۲ چند دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{4}{5}$ می توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

به هر تعداد دلخواه می توانیم دنباله هندسی با قدرت نسبت $\frac{4}{5}$ بنویسیم. هر عدد حقیقی غیر صفر را می توان به عنوان جمله اول در نظر گرفت به عنوان مثال:

$$1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \frac{64}{125}, \dots$$

$$-1, \frac{-4}{5}, \frac{-16}{25}, \frac{-64}{125}, \dots$$

۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

(الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

(ب) دنباله ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

(الف) نادرست است؛ به عنوان مثال، دنباله زیر نمونه ای است از دنباله ای که نه حسابی است و نه هندسی.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

(ب) نادرست است؛ به عنوان مثال، دنباله ثابت زیر هم دنباله ای حسابی با قدرنسبت $d=0$ محسوب

می شود و هم دنباله ای هندسی با قدرنسبت $r=1$

$$9, 9, 9, 9, \dots$$

در واقع هر دنباله ثابت غیر صفر، دنباله ای است که هم حسابی و هم هندسی محسوب می شود.

۴ علی دو چرخه ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دو چرخه دست دوم در هر

سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

(الف) اگر او بعد از سه سال قصد فروش دو چرخه اش را داشته باشد، به چه قیمتی می تواند آن را بفروشد؟

(ب) قیمت دو چرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه ای به دست می آید؟

(الف) توجه داریم که چون $t_1 = 500000$ لذا برای یافتن قیمت دو چرخه بعد از گذشت سه سال باید قیمت

دو چرخه در آغاز سال چهارم یعنی t_4 را محاسبه کنیم.

$$t_4 = t_1 r^3 = 500000 \left(\frac{80}{100} \right)^3 = 500000 \left(\frac{64}{125} \right) = 256000$$

(ب) $t_{n+1} = t_1 r^n = 500000 \left(\frac{80}{100} \right)^n$

روش دوم : می توانیم قیمت دوچرخه پس از یک سال را t_1 در نظر بگیریم.

$$t_1 = 400000$$

$$\text{الف) } t_3 = t_1 r^2 = 400000 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 400000 \left(\frac{16}{25}\right) = 256000$$

$$\text{ب) } t_n = t_1 r^{n-1} = 400000 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

۵ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.

$$2, 4, 8, \dots$$

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{1+2+3+\dots+20} = 2^{\frac{20(20+1)}{2}} = 2^{210}$$

۶ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_6 = 96 \\ t_3 = 12 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_6}{t_3} = \frac{96}{12} \Rightarrow \frac{t_1 r^5}{t_1 r^2} = 8 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$t_3 = 12 \Rightarrow t_1 r^2 = 12 \Rightarrow t_1 (2)^2 = 12 \Rightarrow t_1 = 3$$

$$\text{دنباله : } 3, 6, \underset{t_3}{12}, 24, 48, \underset{t_6}{96}, 192, \dots$$

۷ بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور به همین سرعت کاهش یابند، الف) پیش بینی می شود در هر یک از سال های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم وطن های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

ب) اعداد حاصل، چه دنباله ای تشکیل می دهند؟

حل الف)

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۵	۱۴۹۶۷	۱۴۲۱۹	۱۳۵۰۸	۱۲۸۳۲	۱۲۱۹۱

حل ب) دنباله هندسی با قدرنسبت $r = \frac{95}{100}$ است.

فصل ٢

مثلثات

علم مثلثات متداول امروز، مبتنی بر جیب و ظل است. جیب را به زبان فرانسوی سینوس (sinus) و ظل را تانژانت (Tangente) گویند که اساس آن از علمای اسلام است.

پیش از اسلام یونانیان برای حل مسائل نجومی که احتیاج شدید به مثلثات داشتند، شکل دیگری معروف به شکل «قطاع» را به کار می بردند که هم در مسطحات به کار می آید هم در کره و کتابی که در این زمینه نوشته شده است کتاب اُگر منلائوس است. منلائوس (Menelaus) اهل اسکندریه و از ریاضی دانان نامور یونان است که قبل از میلاد مسیح می زیست.

برگرفته شده از مقاله زیر:

بنای مسجد مدینه و قواعد ریاضی مستنبط از آن، که توسط علامه حسن زاده آملی نوشته شده است.^۱

نگاه کلی به فصل

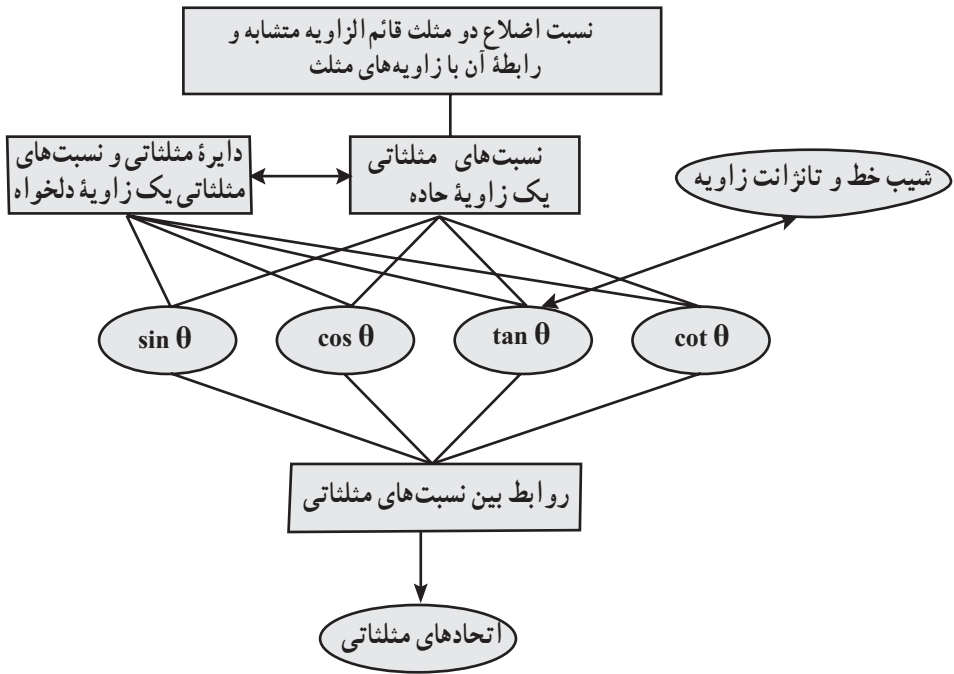
در این فصل، دانش آموزان برای اولین بار با مفهوم نسبت های مثلثاتی آشنا می شوند. در سال های گذشته دانش آموزان با مفهوم تشابه و نسبت بین اضلاع، مفاهیم هندسی مثلث، زاویه، مثلث قائم الزاویه، رابطه فیثاغورس و همچنین شیب خط آشنا شده اند که در این فصل برای درک مفاهیم جدید به آنها نیاز دارند.

در درس اول، دانش آموزان با مفهوم نسبت های مثلثاتی زاویه حاده و محاسبه آنها به کمک مثلث های قائم الزاویه آشنا می شوند. محاسبه تقریبی نسبت های مثلثاتی یک زاویه با استفاده از رسم آن به کمک خط کش و نقاله و تشکیل یک مثلث قائم الزاویه، یکی دیگر از مفاهیم این درس است. در درس دوم، دانش آموزان با دایره مثلثاتی و نحوه محاسبه نسبت های مثلثاتی یک زاویه دلخواه بین 36° تا 36° درجه روی این دایره آشنا می شوند. در ادامه، رابطه بین شیب خط که در سال نهم با آن آشنا شده اند و تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور طول ها آموزش داده می شود.

در درس سوم این فصل، روابط بین نسبت های مثلثاتی معرفی شده است و دانش آموزان با کسب مهارت در استفاده از این روابط به اثبات اتحاد های مثلثاتی و یافتن نسبت های مثلثاتی یک زاویه با داشتن یکی از نسبت های آن اقدام می کنند.

۱- حسن حسن زاده آملی، بنای مسجد مدینه و قواعد ریاضی مستنبط از آن، وقف میراث جاویدان، شماره ۱۵ و ۱۶ (۱۳۷۵) ۱۶-۷.

نقشه مفهومی



نسبت‌های مثلثاتی

اهداف

- آشنایی با نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه حاده با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه، از طریق محاسبه مستقیم.
- محاسبه تقریبی نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با استفاده از رسم آن به کمک خط‌کش و نقاله و تشکیل مثلث قائم‌الزاویه.
- ایجاد مهارت در استفاده از نسبت‌های مثلثاتی در حل مسئله مربوط در زندگی روزمره و کار با مقادیر تقریبی.
- آشنایی با استفاده از ماشین حساب در محاسبه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه.
- آشنایی با روش محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° و 45° و 60° .
- درک این مفهوم که در مثلث‌های مشابه قائم‌الزاویه نسبت اضلاع ثابت است.

ابزارهای مورد نیاز

خط‌کش و نقاله و ماشین حساب

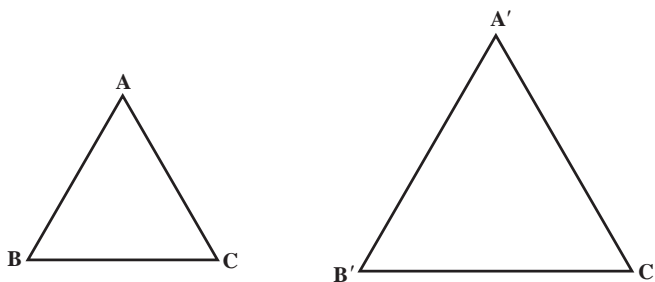
روشی تدریسی

فصل با یک پیش‌سازمان‌دهنده شروع می‌شود که اهمیت مثلثات را برای دانش‌آموزان یادآور می‌شود. در اینجا نکته بسیار مهم این است که چرا باید مثلثات بخوانیم و قبل از هر چیز، لازم است اهمیت موضوع برای دانش‌آموزان به خوبی بیان شود. کاربردهایی که در این درس به آن اشاره شده است در علوم مهندسی،

عمران، نجوم و یادآوری کاربردهای دیگر، می‌تواند برای مهم جلوه دادن اهمیت موضوع بیان شود. به‌عنوان یک مسئله مهم می‌توان به جهت قبله و زاویه مربوطه پرداخته شود که در آن اهمیت زاویه نسبت‌های مثلثاتی به‌خوبی قابل مشاهده است.

پس از بیان اهمیت موضوع و درک این مطلب که چرا به مثلثات نیاز داریم، مسئله اصلی چگونگی ورود به این موضوع است. آنچه دانش‌آموزان تا سال نهم با آن آشنا هستند، مفهوم زاویه و تشابه است که در سال نهم با مفهوم تشابه دو n ضلعی و در حالت خاص، تشابه دو مثلث آشنا شده‌اند. از آنجا که این کتاب مشترک بین دانش‌آموزان علوم ریاضی و تجربی است و دانش‌آموزان پایه دهم علوم تجربی کتابی مربوط به هندسه ندارند، لذا سعی شده است که از مطالب اضافی صرف‌نظر گردد و با حفظ رابطه طولی با مطالب سال‌های قبل و با توجه به اطلاعات علمی دانش‌آموزان این پایه، مطالب به‌صورتی کاملاً ساده و قابل فهم برای هر دو گروه از دانش‌آموزان بیان شود. موضوع مهم در این قسمت این است که دانش‌آموزان رابطه تالس را نمی‌دانند و نباید در این فصل به آن پرداخته شود و تنها از تشابه که در سال نهم با آن آشنا شده‌اند استفاده شود. بنابراین، در اینجا سعی بر این است که با استفاده از تشابه، نسبت‌های مورد نیاز بین اضلاع دو مثلث داده شده را به‌دست آوریم بدون اینکه از رابطه تالس نامی بیاوریم. یکی از مواردی که دانش‌آموزان در مورد تشابه می‌دانند این است که «دو مثلث متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز باهم برابرند».

با توجه به این نکته برای دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ در شکل زیر داریم:



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \text{و} \quad \hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'}$$

اکنون به سادگی می‌توان دید که اگر به‌عنوان مثال: $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$ ، آن‌گاه $\hat{C} = \hat{C}'$ ؛ زیرا

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$$

$$= 180^\circ - (\hat{A}' + \hat{B}') = \hat{C}'$$

بنابراین، هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر با هم برابر باشند، آن‌گاه دو مثلث بنا به حالت سه زاویه برابر با هم متشابه‌اند. یکی از کاربردهای مهم این مطلب در مثلث‌های قائم‌الزاویه است؛ یعنی اگر $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ قائم‌الزاویه باشند و $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$ ، در این صورت اگر $\hat{A} = \hat{A}'$ ، آن‌گاه $\hat{C} = \hat{C}'$ و از این رو، دو مثلث با هم متشابه‌اند.

هدف فعالیت صفحه ۳۵

۱ استفاده از نکته بالا در پیدا کردن موارد خواسته شده است. به عبارت دیگر چون $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ قائم‌الزاویه‌اند و $\hat{A} = \hat{A}'$ پس دو مثلث متشابه‌اند و برابری نسبت اضلاع نظیر به صورت زیر است:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ هدف این فعالیت، استفاده از روابط موجود در فعالیت ۱ و نوشتن تساوی نسبت‌ها در یک مثلث است. به عبارت دیگر، از اینکه $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ می‌توان نتیجه گرفت $AC \cdot A'B' = AB \cdot A'C'$ (زیرا اندازه اضلاع ناصفر هستند). در نتیجه به سادگی چون اندازه‌ها غیر صفر هستند، داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

$$\cdot \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} \quad \text{یا} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

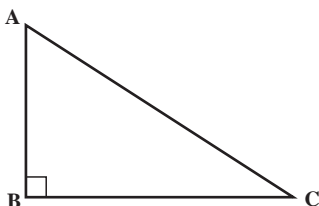
هدف این تساوی‌ها با این ترتیب گفته شده، تعریف نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت است. بنابراین، هدف فعالیت ۲ معرفی مفهوم تانژانت است.

هدف کار در کلاس نیز تعمیق و تثبیت فعالیت بالاست و در این قسمت ثابت می‌شود که نسبت‌های اندازه‌گیری شده (در مثلث قائم‌الزاویه) همگی ثابت هستند و این نسبت را تانژانت می‌نامیم.

قابل توجه است که با هدایت فعالیت ۲ می‌توانستیم ابتدا سینوس یا کسینوس را تعریف کنیم و اگر چه از نظر تاریخی تانژانت زودتر از بقیه نسبت‌ها کاربرد داشته است، ولی انتخاب تانژانت کاملاً سلیقه‌ای بوده است و آنچه اهمیت دارد این است که برای تعریف سینوس و کسینوس می‌بایست کار در کلاس ۲ به کار گرفته شود. با توجه به اینکه در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ ،

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$

می‌توان کتانژانت را هم تعریف کرد و از این رو $\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$



به سادگی می‌توان دید،

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\frac{BC}{AB}} = \frac{1}{\tan A}$$

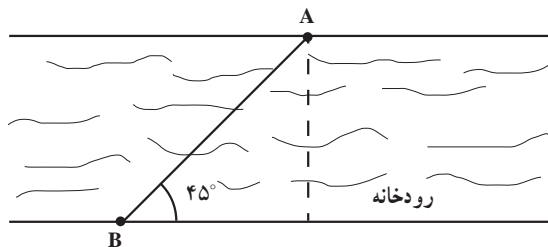
یا به طور معادل $\tan A \cdot \cot A = 1$.

توضیح این مطلب که در چه مواقعی $\tan A = 0$ است، بسیار مهم است و از دیرباز محترم تقاضا می‌شود که تا معرفی نسبت‌های مثلثاتی و حل مثال صفحه ۷۰ شکبیا باشند.

توصیه‌های آموزشی

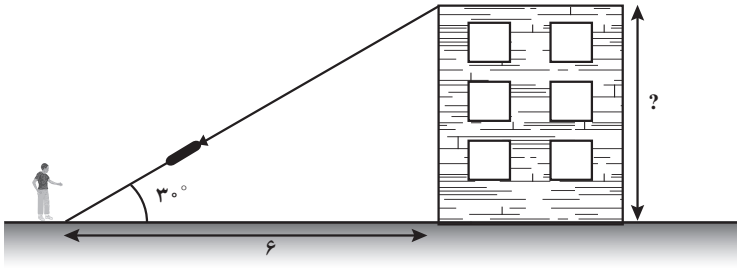
پیشنهاد می‌شود قبل از انجام فعالیت صفحه ۳۱، کاربردهایی از تانژانت ارائه شود. مطالبی که در ابتدای این فصل در صفحه تصویر عنوانی در مورد بنای تاریخی مسجد مدینه آمده است یا هر بنای تاریخی دیگر می‌تواند جالب باشد. همچنین توضیحی برای حل مسئله زیر نیز می‌تواند جالب باشد. طنابی به صورت زیر از یک طرف رودخانه به طرف دیگر طوری متصل شده است که طناب AB با سطح زمین زاویه 45° تشکیل داده است.

چگونه می‌توان عرض رودخانه را محاسبه کرد؟



یا مسئله زیر :

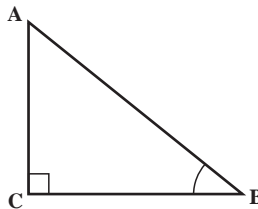
فاصله علی تا پای یک ساختمان ۶ متر است. او با استفاده از یک دستگاه لیزر، با زاویه 30° درجه نوک ساختمان را مورد هدف قرار داده است، چگونه می توان ارتفاع ساختمان را اندازه گیری کرد؟



یکی دیگر از مسائلی که در اینجا می توان به آن اشاره کرد مسئله محل فرود هواپیماست که با استفاده از اندازه گیری تانژانت زاویه هواپیما با افق قابل حل است.

هدف فعالیت صفحه ۳۱

۱ هدف، اندازه گیری تانژانت و کتانژانت زوایای داده شده به طور مستقیم و با اندازه گیری طول اضلاع است. نکته قابل توجه اینکه، چون هنوز روابطی برای اندازه گیری تانژانت و کتانژانت بیان نشده است، طول اضلاع همه مثلث ها واقعی اند و به عنوان یک فعالیت می توان مسئله زیر را هم اضافه کرد. در مثلث قائم الزاویه ABC در شکل زیر با اندازه گیری طول اضلاع مربوطه، تانژانت و کتانژانت زاویه B را به دست آورید.

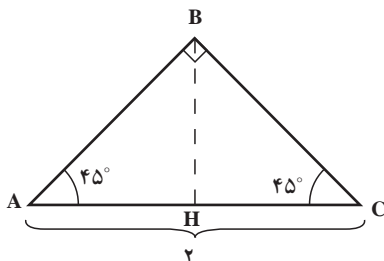


در فعالیت ۲ هدف، پیدا کردن تانژانت و کتانژانت زوایای 30° ، 60° و 45° است. نکته قابل توجه اینکه، شما می توانید از یک مثلث قائم الزاویه برای حل این مسئله استفاده کنید، ولی کار کردن با مثلث متساوی الاضلاع هم برخی از ویژگی های این مثلث را یادآوری می کند و هم دانش آموز با استفاده از رابطه فیثاغورس، خود، طول اضلاع لازم را به دست می آورد.

برای حل قسمت (ب) از فعالیت ۲ از یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین کمک گرفته می شود، ولی دانش آموزان در مثال حل شده صفحه ۳۲ با استفاده از روابط موجود در یک مربع، نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را محاسبه خواهند کرد. برای حل قسمت (پ) مطابق زیر عمل می کنیم:

ابتدا یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، به صورت زیر با وتری به طول ۲ واحد رسم می کنیم، از آنجایی که ارتفاع BH همان میانه ضلع AC است، پس $AH=1$ و چون مثلث ABH، متساوی الساقین است، پس $AH=BH=1$. اکنون با استفاده از تعریف تانژانت داریم:

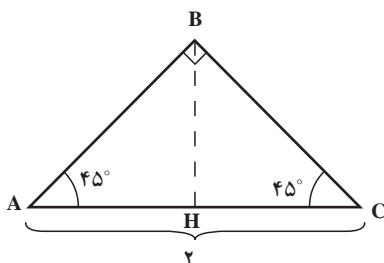
$$\tan 45^\circ = \tan A = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{1} = 1$$



اشتباهات رایج

یکی از بدفهمی های رایج در بین دانش آموزان این مقطع، این است که دانش آموز، تعاریف را به خوبی درک نکرده است. به مثال زیر توجه کنید.

معلم: با توجه به شکل، تانژانت و کتانژانت زاویه 45° را محاسبه کنید.



راه حل محمدمهدی:

ابتدا ارتفاع BH را رسم کرده و چون BH میانه $\triangle ABC$ نیز هست پس، $AH=BH$ و از این رو:

$$\tan 45^\circ = \tan A = \frac{BH}{AH} = 1$$

راه حل علی :

$$\tan 45^\circ = \tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AC}$$

اکنون چون ارتفاع BH میانه است پس AH=BH و از این رو :

$$BC^2 = AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}AH$$

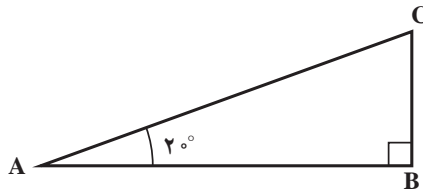
$$\Rightarrow \tan 45^\circ = \tan A = \frac{\sqrt{2}AH}{AC} = \frac{\sqrt{2}AH}{2AH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

به سادگی می‌توان دید پاسخ علی به این دلیل غلط است که مفهوم ضلع مقابل و ضلع مجاور به زاویه A را درک نکرده است.

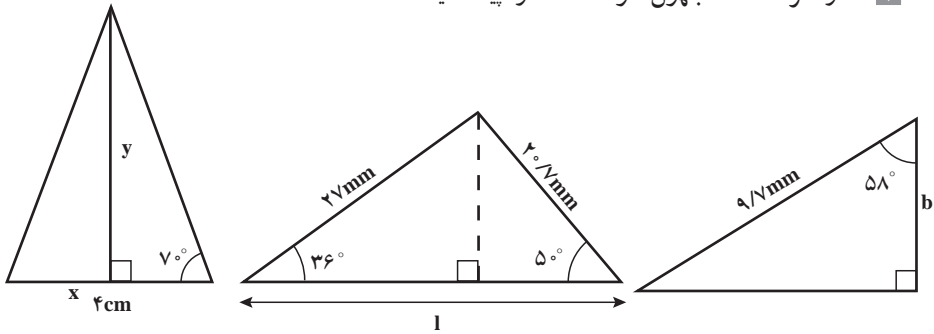
در ادامه مطالب صفحه ۳۱ مفاهیم سینوس و کسینوس تعریف شده‌اند و همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، در این قسمت باید فعالیت صفحه ۳۰ تکرار شود. در ادامه نسبت‌های مثلثاتی تعریف می‌شوند.

در ابتدای صفحه ۳۲ یک مثال حل شده داریم که نسبت‌های مثلثاتی زاویه 45° به دست آمده است و در کار در کلاس بعدی، از دانش‌آموز خواسته شده است تا نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° ، 45° و 60° را به دست آورند. نکته مهم این است که این کار در کلاس دقیقاً باید همانند فعالیت حل شود و از پر کردن جدول بدون کارورزی لازم اجتناب شود. حفظ کردن اعداد جدول وقتی ارزشمند است که دانش‌آموز خود این اعداد را به دست آورد. حل مثال‌های زیر می‌توانند مفید باشند :

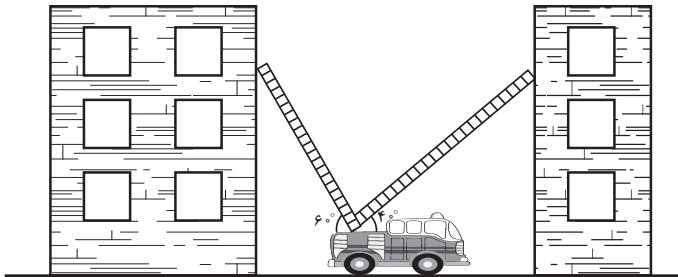
■ یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه چنان رسم کنید که $\hat{A} = 2^\circ$. با محاسبه طول اضلاع مثلث نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2° را (با استفاده از ماشین حساب) به دست آورید.



۲ اندازه هر قسمت مجهول خواسته شده را پیدا کنید.



۳ دو نردبان 10° متری به صورت زیر به دو ساختمان مطابق شکل، تکیه داده اند. این دو ساختمان با هم چقدر فاصله دارند؟



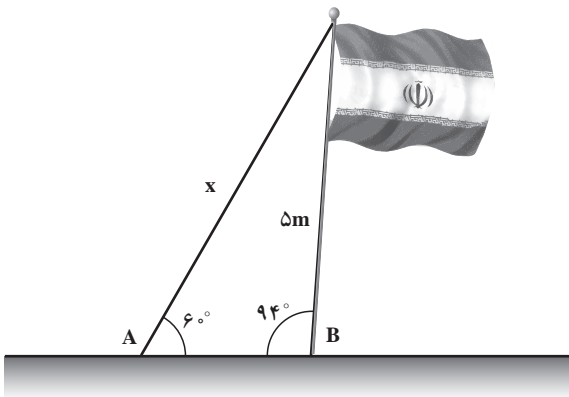
۴ زاویه میله پنج متری پرچم جمهوری اسلامی ایران با زمین 94° است. طنابی به بالای میله بسته شده و آن را در نقطه A به زمین متصل می کند.

الف) طناب با زمین زاویه 6° می سازد. طول آن را حساب کنید.

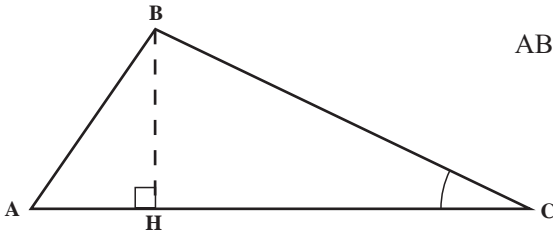
ب) فاصله بین A و B را پیدا کنید.

ج) اگر پرچم را به زمین عمود کنیم

طول طناب چقدر خواهد شد؟



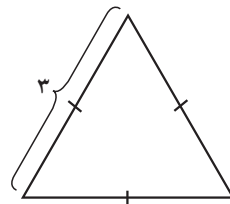
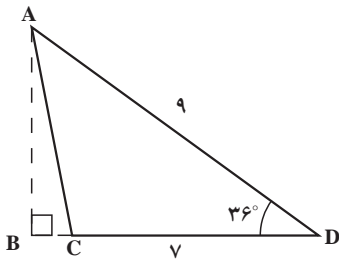
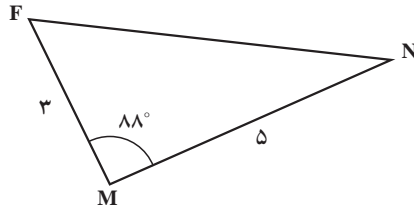
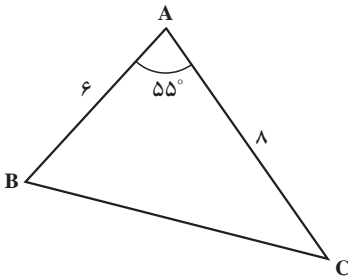
۵ در شکل زیر $AB=2AH$ و $BC=2BH$



اندازه زاویه‌های A ، B و C را به دست آورید.

هدف مثال‌های صفحه ۳۳ در راستای تعمیق و تثبیت مفاهیم نسبت‌های مثلثاتی و استفاده از آنها در حل مسائل واقعی واقعی است. یکی از این کاربردها، پیدا کردن مساحت یک مثلث دلخواه با داشتن دو ضلع از یک مثلث و اندازه زاویه بین آنهاست که این مطلب در کار در کلاس ۱ صفحه ۳۴ نشان داده شده است. شما می‌توانید فعالیت‌های زیر را نیز اضافه کنید:

۱ مساحت هر مثلث را به دست آورید (تا ۲ رقم اعشار).



دایره مثلثاتی

درس دوم

اهداف

- آشنایی با دایره مثلثاتی.
- آشنایی با زاویه‌های مثبت و منفی در بازه $360^\circ - 36^\circ$.
- محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های منفرجه به کمک دایره مثلثاتی.
- محاسبه سایر نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با داشتن اندازه سینوس یا کسینوس آن زاویه.
- ایجاد مهارت در استفاده از دایره مثلثاتی در تعیین محل یک زاویه مشخص در نواحی چهارگانه.
- آشنایی با رابطه بین شیب خط با تانژانت زاویه.

این درس بدون یک مسئله کاربردی شروع شده است، ولی می‌توان با مثال‌هایی مثل چرخش زمین، چرخ و فلک یا چرخش هسته اتم ذهن دانش‌آموز را برای لزوم آشنایی با زاویه‌های علامت‌دار و زاویه‌های بیش از 180° درجه آماده کرد.

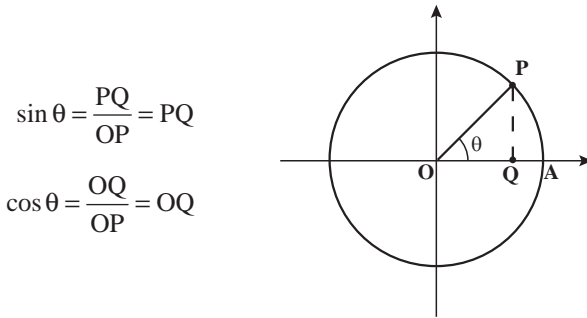
توصیه‌های آموزشی

در این قسمت می‌توان یک زاویه حاد دلخواه رسم کرد و بعد با ثابت نگه داشتن یک ضلع و چرخش ضلع دیگر زاویه حول آن، دایره‌ای ایجاد کرد که ابتدا لزومی ندارد شعاع آن یک باشد. بعد به تعریف کتاب مراجعه کنید و به شکل استاندارد برای این دایره، شعاع یک را تعریف نمایید.

بعد از تعریف یک زاویه با اندازه‌های مثبت و منفی، در فعالیت، سؤال‌هایی برای درک بهتر و ایجاد مهارت آورده شده است.

اشباهات رایج

در ابتدای این درس، دایره مثلثاتی معرفی می‌شود. اکنون فرض کنید $P(x, y)$ نقطه‌ای دلخواه، غیر از مبدأ روی این دایره دلخواه انتخاب شود و زاویه AOP مساوی θ باشد. به سادگی می‌توان دید:



$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = PQ$$

$$\cos \theta = \frac{OQ}{OP} = OQ$$

از آنجایی که اندازه PQ و OQ به ترتیب با y و x برابرند؛ بنابراین داریم:

$$x = \cos \theta \quad \text{و} \quad y = \sin \theta$$

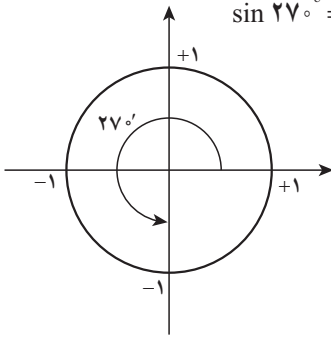
و از این رو $P(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ، بنابراین، هر نقطه روی دایره مثلثاتی را می‌توان با $\cos \theta$ و $\sin \theta$ متناظر کرد.

هدف فعالیت، مهم جلوه کردن این موضوع است و کار در کلاس در راستای همین موضوع طراحی شده است. در کار در کلاس ۲ توضیح داده می‌شود: وقتی که می‌گوییم زاویه α در ناحیه مثلثاتی اول، دوم، سوم یا چهارم قرار دارد، در واقع انتهای کمان مربوط به زاویه α در یکی از نواحی بالا قرار دارد. هدف از مثال صفحه ۳۷، معرفی نسبت‌های مثلثاتی 0° ، 9° ، 18° ، 27° ، 36° است. دقت کنید که در مواردی مثل 0° که حاصل کسر عدد تعریف نشده است، نسبت مثلثاتی مربوطه تعریف نشده است. بنابراین، با حل کار در کلاس صفحه ۳۸ جدول به صورت زیر کامل می‌شود:

مقدار	0°	9°	18°	27°	36°
$\sin \theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan \theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

به عنوان مثال، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۷° به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\sin ۲۷^\circ = y = -۱ \quad \text{و} \quad \cos ۲۷^\circ = x = ۰$$



بنابراین:

$$\text{تعریف نشده} = \frac{\sin ۲۷^\circ}{\cos ۲۷^\circ} = \frac{-۱}{۰} \quad \text{و} \quad \tan ۲۷^\circ = \frac{\sin ۲۷^\circ}{\cos ۲۷^\circ} = \frac{۰}{-۱} = ۰ \quad \text{و} \quad \cot ۲۷^\circ = \frac{\cos ۲۷^\circ}{\sin ۲۷^\circ} = \frac{۰}{-۱} = ۰$$

هدف فعالیت صفحه ۳۸

اگر زاویه θ به غیر از ۰° ، ۹° ، ۱۸° ، ۲۷° ، ۳۶° باشد، آن‌گاه علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ در

چهار ربع به صورت زیر است:

مقدار	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

هدف از مثال صفحه ۳۸ این است که اگر یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ و ناحیه‌ای که θ در آن قرار دارد را بدانیم، آن‌گاه می‌توانیم سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنیم. به عنوان مثال، اگر $\sin \theta = \frac{۲}{۷}$ ، آن‌گاه چون علامت $\sin \theta$ مثبت است پس با توجه به جدول بالا θ در ربع اول یا دوم قرار دارد، بسته به اینکه θ در کدام ربع باشد، علامت سایر نسبت‌های مثلثاتی فرق خواهند کرد. اگر در مثال حل‌شده کتاب θ در ربع اول قرار گیرد، آن‌گاه نسبت‌های مثلثاتی θ به صورت زیر قابل محاسبه‌اند:

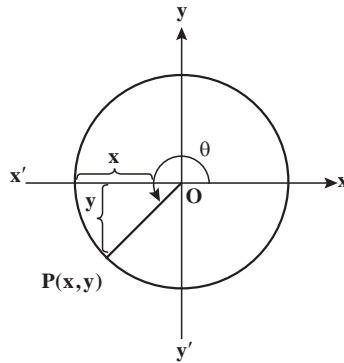
$$\sin \theta = \frac{۲}{۷} = y \Rightarrow y = \frac{۲}{۷}$$

از طرفی می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی $x^2 + y^2 = 1$ پس $x^2 = 1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49}$ یعنی $x = \frac{3\sqrt{5}}{7}$ ؛ زیرا در ناحیهٔ اول $x > 0$ پس $\cos \theta = x = \frac{3\sqrt{5}}{7}$ و در نتیجه داریم:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} \quad \text{و} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

حل فعالیت ۱ صفحهٔ ۳۹

۱ فرض کنیم نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به طوری که $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد؛ بنابراین، چون $x^2 + y^2 = 1$ پس $(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 = 1$ و از این رو $\frac{1}{4} + y^2 = 1$ و در نتیجه $y^2 = \frac{1}{4}$ چون در ناحیهٔ سوم y منفی است، پس $y = \frac{-1}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ و از این رو $\sin \theta = y = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.



(الف) مختصات نقطهٔ P برابر است با: $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$.

(ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = 1 \quad \text{و} \quad \cot \theta = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = 1$$

۲ اگر $\cos \alpha = \frac{-2}{5}$ ، آن گاه چون کسینوس زاویه α منفی است، طبق جدول علامت نواحی مثلثاتی α می تواند در ربع دوم یا سوم قرار بگیرد.

۳ زاویه ای که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت است یک زاویه در ناحیه چهارم مثلثاتی است، پس مسئله یک مسئله باز پاسخ است و جواب های متعددی دارد.

حل مسائل زیر در این قسمت پیشنهاد می شود:

• اگر $\sin \alpha = \frac{-2}{3}$ ، انتهای کمان روبه روی زاویه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

• اگر $\tan^3 \alpha = \frac{2}{3}$ آن گاه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

• بیشترین و کمترین مقدار عبارت های زیر را به دست آورید:

$$1 - 2 \cos \theta \qquad 3 + 2 \sin \theta$$

۴ اگر θ $\tan \theta$ و $\sin \theta$ هم علامت باشند θ در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

دانش آموزان در سال گذشته با مفهوم شیب خط و علامت آن آشنا شده اند. هدف فعالیت صفحه ۴۰ این است که نشان دهد اگر α زاویه ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می سازد، آن گاه $\alpha = \tan$ شیب خط.

نکته مهم در این فعالیت این است که اندازه زاویه مورد نظر ممکن است بیشتر از 90° باشد و از این رو، باید علامت تانژانت نیز در نظر گرفته شود؛ زیرا در ناحیه دوم مثلثاتی علامت تانژانت منفی است.

فعالیت کمکی ۱

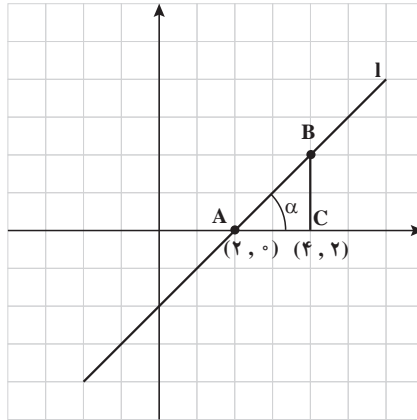
الف) معادله خط را به دست آورید.

حل

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} = \frac{2 - 0}{4 - 0} = 1$$

اکنون

$$y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2$$



ب) تانژانت زاویه α را پیدا کنید. (اندازه زاویه α مهم نیست).

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{2} = 1 = \text{شیب خط}$$

ج) معادله خط را با توجه به اینکه شیب خط با تانژانت زاویه α برابر است، به دست آورید.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \text{ و } m = \tan \alpha$$

$$y = 0 + 1(x - 2) = x - 2$$

از این رو:

که همان نتیجه قسمت (الف) به دست می آید.

حل کار در کلاس صفحه ۴۰

فعالیت بالا را برای خطهای زیر تکرار کنید:

ابتدا نقاط کمکی روی خط به صورت زیر در

نظر می گیریم

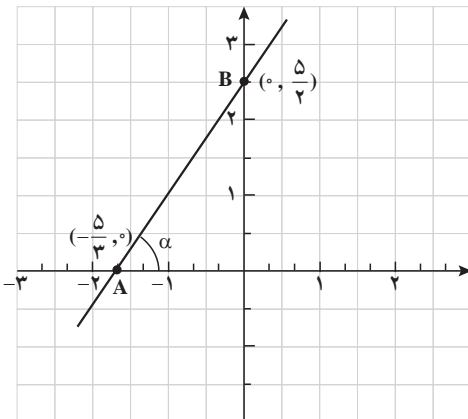
$$\text{الف) } 2y - 3x = 5$$

$$x = 0 \Rightarrow 2y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow -3x = 5 \rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

پس نقاط $(0, \frac{5}{2})$ و $(\frac{-5}{3}, 0)$ روی خط قرار

دارند.



بنابراین، شیب خط برابر است با :

$$m = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{5 - 0}{0 + \frac{5}{3}} = \frac{3}{2}$$

از طرفی در مثلث قائم الزاویه ABC داریم :

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{2} = m \text{ شیب خط}$$

ب) $x + y = 2$

$$y = \frac{3}{2}(x + \frac{5}{3})$$

بنابراین، معادله خط برابر است با :

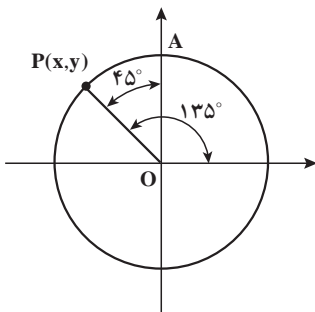
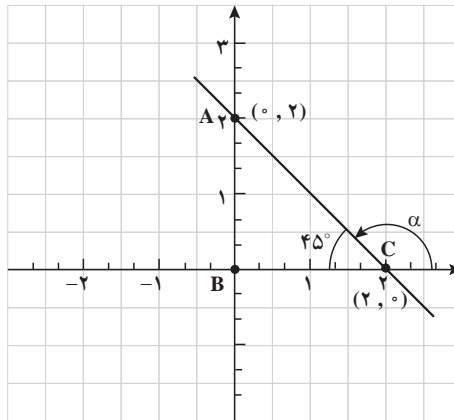
$$2y = 3x + 5 \text{ یا } 2y - 3x = 5$$

و از این رو :

به سادگی می‌توان دید نقاط کمکی روی این خط (۲ و ۰) هستند. پس شیب خط برابر

$$m = \frac{2 - 0}{0 - 2} = -1$$

است با :



از طرفی زاویه‌ای که α با جهت مثبت محور x ها می‌سازد یک زاویه منفی است. چون $\alpha = 135^\circ$ در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد، علامت آن منفی است. اکنون مختصات نقطه $p(x, y)$ را روی دایره مثلثاتی به دست می‌آوریم.

ابتدا چون زاویه $\angle OAP = 45^\circ$ سپس چون $x=y$ و اینکه $x^2+y^2=1$ ، نتیجه می‌گیریم.

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad y = \frac{+1}{\sqrt{2}} = \frac{+\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin 135}{\cos 135} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1 \quad \text{از این رو:}$$

در نتیجه $\tan \alpha = -1 = \text{شیب خط}$.

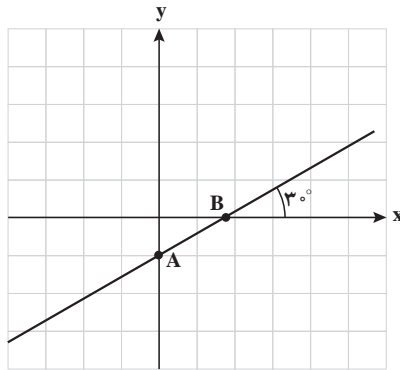
۲ معادله خطی که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 30° است و از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد.

حل. چون زاویه α با جهت مثبت محور x مد نظر است، پس

$$\text{شیب خط} = \tan 30^\circ = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

و از این رو:

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$



دقت کنید اگر در حل این تمرین جهت مثبت محور x ها در نظر گرفته نشود، آن گاه نمودار خط به صورت زیر است و چون زاویه α در ناحیه دوم مثلثاتی قرار می‌گیرد، پس

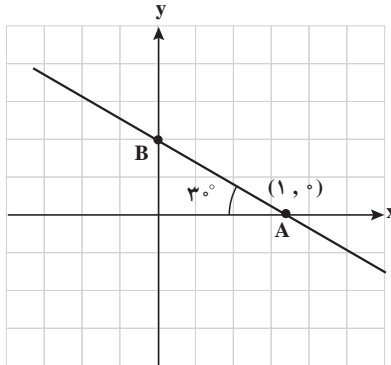
$$\text{شیب خط} = -\tan 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

و از این رو، معادله خط برابر است با:

$$y - 0 = \frac{-\sqrt{3}}{3}(x - 1) = \frac{-\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

پس



حل تمرین‌های صفحه ۴۰

۸ به سادگی با استفاده از خطوط موازی می‌توان نتیجه گرفت زاویه خط را با جهت مثبت محور x ها برابر با 60° است و شیب خط $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$. اکنون چون $(0, -3)$ یک نقطه کمکی است، پس داریم:

$$\text{معادله خط } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 3 = \sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

درس سوم

اهداف

- آشنایی با روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
- کسب مهارت در محاسبه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مانند α با استفاده از روابط مثلثاتی و داشتن یکی از نسبت‌های مثلثاتی
- توانایی استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی در تعیین درستی یا نادرستی یک رابطه مثلثاتی.

روش تدریس

دانش‌آموزان در سال گذشته با چند اتحاد جبری و تعریف کلی اتحاد آشنا شده‌اند می‌توان درس را با یادآوری مفهوم اتحاد جبری آغاز کرد. با انجام فعالیت اول، دانش‌آموزان به سمت کشف رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ هدایت می‌شوند. در ادامه درس، دانش‌آموزان مهارت استفاده از این رابطه را در محاسبه سایر نسبت‌های مثلثاتی کسب کرده و آن را با انجام کار در کلاس و مثال مربوط به آن فرا می‌گیرند. همچنین، با استفاده از رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{و} \quad \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

اشباهات رایج

دانش آموزان بدون توجه به زاویه α در رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ رابطه‌ای مانند $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ را نیز برابریک در نظر می‌گیرند.

توصیه‌های آموزشی

می‌توان از دانش آموزان خواست تا رابطه مورد نظر را روی دایره مثلثاتی به ازای هر زاویه دلخواه نیز اثبات کنند.

این درس با یک فعالیت آغاز می‌شود که این فعالیت یادآوری نسبت‌های مثلثاتی است و در ادامه، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی را مورد بحث قرار می‌دهد. در ابتدا درستی رابطه مهم $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال حل شده صفحه ۴۳ تکراری است و در درس قبل مورد بحث قرار گرفت، با این تفاوت که در حل این مسئله فقط از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی استفاده شده است و دیگر مستقیماً با دایره مثلثاتی سروکار نداریم و در کار در کلاس دو رابطه مهم دیگر به دست می‌آیند. سرانجام رابطه ۳ مشابه فعالیت ۱، صفحه ۳۹ است، ولی در اینجا باید از رابطه‌های ۱ و ۲، صفحه ۴۳ استفاده کنیم. بنابراین، برای حل این مسئله داریم:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{-3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

از طرفی $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ بیان می‌کند که α در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد و چون در این

ناحیه، کسینوس منفی است، پس $\cos \alpha = \frac{-4}{5}$. اکنون می‌دانیم $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ پس

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{-4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

اکنون چون α در ناحیه دوم است و سینوس در ناحیه دوم مثبت است، پس $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. سرانجام

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{-4}{3}$$

یا

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{-4}{3}$$

در ادامه قرارداد می‌کنیم که هر تساوی درست مثلثاتی را که عبارت‌های تعریف شده با معنا هستند را یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم. به عبارت دیگر، یک اتحاد، گزاره‌ای است که دو مقدار با هم مساوی باشند، به ازای همه مقادیر متغیرها که عبارات را معنادار می‌کنند. به عنوان مثال، عبارت‌های زیر، اتحادند.

$$\text{الف) } 3 + \sin \theta = \sin \theta + 3 \quad \text{ب) } \cos \theta + \theta = \theta + \cos \theta$$

$$\text{ج) } (\sin \theta \neq 0) = \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta \quad \text{د) } (\sin \theta \neq 0) \sin \theta \times \frac{1}{\sin \theta} = 1$$

مثال. عبارت $\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta}$ را تا حد امکان ساده کنید.

حل. طبق اتحاد مثلثاتی $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ داریم: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ و از این رو:

$$\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta} \stackrel{(\sin \theta \neq 0)}{=} \sin \theta$$

مثال. بررسی کنید که آیا $\frac{\sin \theta \cos \theta}{\tan \theta} = \cos^2 \theta$ یک اتحاد است؟

حل.

$$\text{طرف چپ} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\sin \theta \cdot \cos^2 \theta}{\sin \theta} \stackrel{\sin \theta \neq 0}{=} \cos^2 \theta = \text{طرف راست}$$

توصیه‌های آموزشی

یک تمرین خوب برای حل مسائل این قسمت از کتاب، بررسی این نکته است که آیا رابطه داده شده یک اتحاد است یا نه و اگر نیست چرا؟ اگرچه در کتاب روابطی داده شده‌اند (مثل کار در کلاس (پ) صفحه ۴۵) که در آنها از دانش آموز پرسیده می‌شود، کدام رابطه یک اتحاد است؟ اما در حالت کلی، بررسی روابطی که اتحاد نیستند کار دشواری است. به عبارت دیگر، برای آنکه ثابت کنیم یک رابطه اتحاد نیست، باید مثال نقض ارائه کنیم و گاهی اوقات، پیدا کردن یک مثال نقض، بسیار دور از ذهن است. بنابراین، برای عمق بخشیدن به مطالب این بخش، مسائلی باید در این زمینه مطرح شوند و از دانش‌آموزان خواسته شود تا مثال نقض ارائه کنند.

مثال. نشان دهید $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$ یک اتحاد مثلثاتی نیست.

حل. اگرچه این عبارت برای برخی از زوایا مثل $\alpha = 0^\circ$ و $\alpha = 90^\circ$ درست است، ولی یک اتحاد نیست؛ زیرا اگر $\alpha = 30^\circ$ ، آن‌گاه

$$\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \neq 1.$$

مثال. نشان دهید $2 - \sin^2\theta = 2\cos\theta$ یک اتحاد نیست.

حل. اگرچه به ازای $\theta = 0^\circ$ ، رابطه درست است، ولی برای $\theta = 90^\circ$ داریم:

$$2 - 1^2 = 2 \times 0 \Rightarrow 1 = 0.$$

که یک تناقض است.

مثال. بررسی کنید که آیا $1 - \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$ ($\sin\theta \neq 0$)

حل.

$$\text{طرف چپ} = \frac{1}{\sin^2\theta} - \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 = \text{طرف راست}$$

پس این عبارت، یک اتحاد است.

حل تمرین صفحه ۴۶ قسمت (ث)

$$\text{طرف چپ} = \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

اکنون چون $1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x) = \cos^2 x$ ، پس با ضرب صورت و مخرج رابطه

در $1 + \sin x$ داریم:

$$\frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \stackrel{\cos x \neq 0}{=} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \text{طرف راست}$$

حل تمرین های صفحه ۴۵ قسمت (ت)

$$\text{طرف سمت چپ: } 1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \frac{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x}$$

$$\stackrel{1 + \sin x \neq 0}{=} 1 - (1 - \sin x) = \sin x = \text{طرف راست}$$

مثال. بررسی کنید که آیا $\frac{1}{\sin \beta} - \sin \beta = \cot \beta \cos \beta$ یک اتحاد است.

حل.

$$\text{طرف چپ: } \frac{1}{\sin \beta} - \sin \beta \stackrel{\text{مخرج مشترک}}{=} \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin \beta} \stackrel{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1}{=} \frac{\cos^2 \beta}{\sin \beta}$$

$$= \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \times \cos \beta = \cot \beta \times \cos \beta = \text{طرف راست}$$

پس این عبارت یک اتحاد است.

دو خطای رایج

۱ با توجه به اینکه در این قسمت، دانش آموزان گاهی در اثبات درستی یک رابطه، اغلب نیاز به کمی ذکاوت و در مسائل پیچیده تر نیاز به مقداری خلاقیت دارند، ممکن است تشخیص ندهند از کدام طرف تساوی باید حل را شروع کنند؛ چون اغلب در مسائل قسمت های دیگر، یک طرف تساوی داده شده و طرف دیگر تساوی از دانش آموز خواسته می شود و این سردرگمی که این تساوی کامل است و چطور نیاز به حل دارد برای برخی از دانش آموزان باقی می ماند.

۲ نشان دهید $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ یک اتحاد نیست.

حل. بسیار رایج است که دانش آموزان معمولاً $(a+b)^2$ را با $a^2 + b^2$ اشتباه می‌گیرند. برای اینکه نشان دهیم گزاره بالا یک اتحاد نیست باید θ را طوری انتخاب کنیم که سینوس و کسینوس آن صفر نباشند؛ مثلاً فرض کنیم $\theta = 30^\circ$ ، پس داریم:

$$\text{طرف چپ} = (\sin\theta + \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{طرف راست} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \neq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس گزاره بالا یک اتحاد نیست.

توصیه‌های آموزشی

بہتر است اولین ارزشیابی این قسمت، چند سؤال جدید و حل نشده باشد، ولی برای حل به دانش‌آموزان اجازه استفاده از کتاب و رجوع به فرمول‌های مربوطه داده شود.

مسائل کمکی

۱ عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید

الف) $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ ب) $\cos\theta(1+\tan^2\theta)$ ج) $(\cot\alpha + \frac{1}{\sin\alpha})(\cot\alpha - \frac{1}{\sin\alpha})$

مخرج مشترک ضرب اتحاد مزدوج

۲ بررسی کنید که آیا گزاره‌های زیر، اتحادند.

الف) $\frac{1}{\sin x} - \sin x = \frac{\cos^2 x}{\sin x} \quad \frac{1 - \sin^2 n}{\sin x} = \frac{\cos^2 n}{\sin x}$

ب) $\left(\frac{1}{\cos\beta} + \tan\beta\right)^2 = \frac{1 + \sin\beta}{1 - \sin\beta}$

$$\left(\frac{1 + \cos\beta \tan\beta}{\cos\beta}\right)^2 = \left(\frac{1 + \sin\beta}{\cos\beta}\right)^2 = \frac{1 + \sin^2\beta + 2\sin\beta}{\cos^2\beta} = \frac{1 + \sin^2\beta + 2\sin\beta}{(1 - \sin\beta)(1 + \sin\beta)}$$

$$\text{ب) } \sin^{\gamma} \alpha - \cos^{\gamma} \alpha = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$$

$$\frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^{\gamma} \alpha - \cos^{\gamma} \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}}{\frac{\sin^{\gamma} \alpha + \cos^{\gamma} \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \sin^{\gamma} \alpha - \cos^{\gamma} \alpha$$

$$\text{ت) } \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \tan^{\gamma} \theta} \quad (0^{\circ} \leq \theta \leq \frac{\pi}{\gamma})$$

$$\text{ث) } \tan \theta \cdot \sin \theta = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta$$

$$\text{ج) } \tan^{\gamma} \theta \cdot \sin^{\gamma} \theta = \tan^{\gamma} \theta - \sin^{\gamma} \theta$$

$$\text{ح) } (\sin \theta + \cos \theta)^{\gamma} + (\sin \theta - \cos \theta)^{\gamma} = \gamma$$

$$\text{ز) } \cos^{\gamma} \theta - \sin^{\gamma} \theta = 1 - \gamma \sin^{\gamma} \theta$$

$$\text{ح) } \cos^{\gamma} \theta - \sin^{\gamma} \theta = \gamma \cos^{\gamma} \theta - 1$$

فصل ۳

توان‌های گویا و عبارتهای جبری

نگاه کلی به فصل

هدف‌های این فصل را می‌توان به اختصار چنین بیان کرد :

• همان‌گونه که توان اعداد را در آغاز برای توان‌های طبیعی عددهای ۲ و ۳ تعریف می‌کنیم و سپس این مفهوم را برای توان n ام تعمیم می‌دهیم؛ ریشه‌عددها در سال سوم برای عددهای ۲ و ۳ تعریف شده است و لذا آن را به سایر عددهای طبیعی، ریشه‌چهارم، ریشه‌پنجم، ... و به‌طورکلی ریشه‌ n ام باید تعمیم داد. یادآوری می‌شود که فرایند تعمیم یکی از روش‌های اساسی توسعه و تکامل ریاضیات در همه شاخه‌های آن است.

• در این فصل، مفهوم توان را به توان‌های کسری نیز گسترش می‌دهیم. البته هدف نهایی تعریف توان حقیقی اعداد است، لکن به دلایل فنی در سطح فعلی به توان‌های حقیقی نپرداخته‌ایم. مفهوم توان حقیقی پیش‌نیاز تعریف تابع نهایی است.

توابع نهایی نیز در بررسی پدیده‌هایی که مشمول رشد و زوال هستند به‌طور طبیعی وارد بحث می‌شوند. پدیده‌های طبیعی غالباً دچار تغییرات اند و این تغییرات یا در قالب رشد صورت می‌پذیرد، یا از الگوی زوال پیروی می‌کند. وقتی یک جامعه باکتری در محیطی مناسب قرار گیرد، به شدت رشد می‌کند، همچنین اگر مقداری مواد رادیواکتیو را در نظر بگیریم، این مقدار ثابت نمی‌ماند و دستخوش زوال شده و به مواد سبک‌تر تجزیه می‌گردد.

گرچه توان حقیقی برای اعداد گنگ به دلایل آموزشی گفته نمی‌شود، لکن باید در نظر داشت که در عمل وقتی با یک عدد گنگ سر و کار داریم، آن را با یک تقریب مناسب گویا کرده و با عدد تقریب‌شده گویا کار می‌کنیم؛ لذا اگر پرسش شود که مثلاً $3^{\sqrt{2}}$ چه عددی است، هرگاه $\sqrt{2} \approx 1/4$ در نظر بگیریم، این توان به‌آسانی به توان گویا تبدیل می‌شود :

$$3^{\sqrt{2}} = 3^{1/4} = 3^{1/5} = 3^{1/5} = \sqrt[5]{3^1}$$

اعداد گنگ فقط در محاسبات ریاضیات محض مطرح‌اند، هر عدد گنگ، تا هر رقم اعشار که بسط داده شود، در واقع با یک عدد گویا تقریب می‌گردد.

دانش‌آموزان پس از مطالعه و کار روی این فصل باید بتوانند :

• مفهوم ریشه را برای هر عدد طبیعی مانند $4 < 5, 6$ و در نهایت مفهوم کلی آن را برای n به درستی تعریف کنند.

- رابطه ریشه و توان را به عنوان دو عمل معکوس، شناخته و هر رابطه ریشه‌ای را به یک رابطه توانی و رابطه توانی را به یک تساوی ریشه‌ای تبدیل کنند.
- از ماشین حساب برای محاسبه ریشه و توان‌ها استفاده کنند.
- دریابند که عددهای مثبت دارای دو ریشه قرینه برای فرجه‌های زوج بوده، لکن ریشه فرد ندارند.
- توان گویا را برای هر عدد مثبت بر حسب ریشه تعریف کنند.
- قواعد ساده ریشه‌گیری را بیان کنند:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

- قواعد ساده توان‌های گویا را بیان کنند.

$$a^r a^s = a^{r+s} \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

- با ضرب و جمع عبارات‌های جبری به راحتی کار کنند و اتحادها را به عنوان تساوی‌های بین عبارات‌های جبری، که همواره برقرارند، بشناسند.
- اتحادهای مکعب مجموع (تفاضل) را بیان کنند.
- تجزیه عبارات‌های $a^n + b^n$ و $a^n - b^n$ را به حاصل ضرب دو عامل انجام دهند.
- برخی مخرج‌های گنگ عبارات‌های جبری را با ضرب در عبارت مناسب گویا کنند.
- از اتحادها برای محاسبه ذهنی برخی ضرب‌های عددی استفاده کنند؛ مانند:

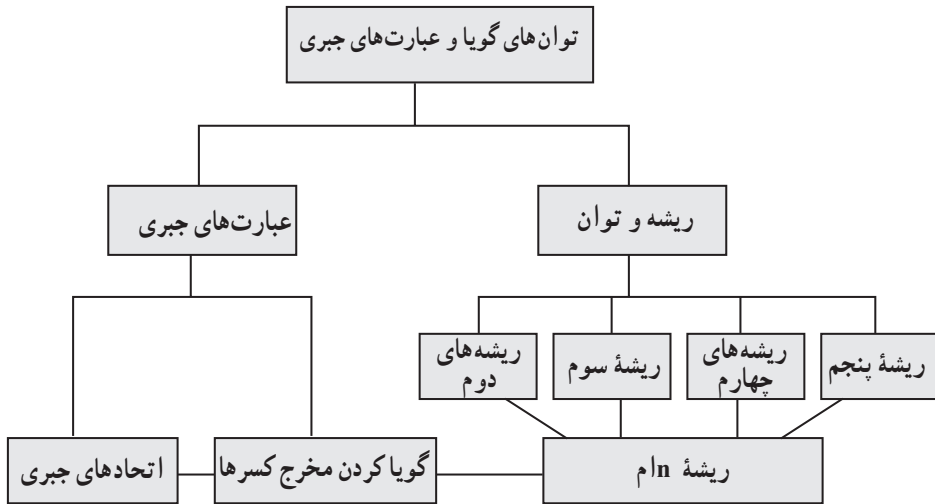
$$11 \times 13 = (12-1)(12+1) = 143$$

$$14 \times 16 = (15-1)(15+1) = 224$$

- دریابند که توان‌های بزرگ‌تر از واحد به سرعت افزایش می‌یابد.
- درحالی‌که توان‌های کوچک‌تر از واحد به سرعت کاهش می‌یابد.
- مثلاً به محاسبه $(\frac{1}{98})^n$ و $(\frac{1}{2})^n$ بپردازند.
- (برای مقادیر n)؛ به زبان فنی تر تابع a^x ($a > 1$) صعودی و تابع a^x ($a < 1$) نزولی است، لکن نامی از تابع برده

نشود.

نقشه مفهومی



ریشه و توان

روش تدریس

هدف فعالیت، تعمیق مفهوم ریشه و توان و مرور آن از سال نهم است. فعالیت این ایده را مطرح می‌سازد که ریشه و توان مفاهیم معکوس یکدیگرند و این فرایند با مفهوم ریشه‌گیری در سطوح بالاتر علمی هماهنگی و انطباق دارد. وقتی $27 = (-3)^3$ یعنی $27 - 3$ توان سوم -3 است، با ریشه‌گیری سوم از $27 - 3$ به عدد -3 برمی‌گردیم.

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

در جدول این مفهوم به‌عنوان فعالیت شماره ۲ تمرین شده است. در جایی عدد داده شده است و ریشه سوم آن را دانش‌آموزان در زیر آن عدد می‌نویسند و در جاهایی ریشه سوم داده شده است و عدد را از راه توان رساندن به دست می‌آورند. برای محاسبه ریشه سوم برخی اعداد، ریشه سوم تقریبی که دانش‌آموز به دست می‌آورد کفایت می‌کند:

$$\sqrt[3]{3} \approx 1/6$$

$$\sqrt[3]{30} \approx 3/7$$

$$\sqrt[3]{3000} \approx 1/25$$

$$\sqrt[3]{3000} \approx 13$$

و یا

باید توجه داشت وقتی مقدار تقریبی یک محاسبه مورد نظر است، هم تقریب کاهشی و هم تقریب افزایشی مورد قبول می‌باشد؛ زیرا نوع تقریب مشخص نشده است.

○ در ادامه هدف کار در کلاس، که به شکل گفتمان مطرح شده است، این واقعیت است که ما در ریاضیات، وقتی ریشه دقیق یک عدد مورد نظرمان است، به ناچار باید از نماد رادیکال استفاده کنیم.

$\sqrt[3]{25}$ یعنی مقدار دقیق ریشه سوم ۲۵ و آن عددی است که وقتی به توان ۳ برسد برابر ۲۵ است. اما در عمل با مقدارهای تقریبی آن کار می‌کنیم.

در ادامه ریشه چهارم تعریف شده است دانش‌آموزان با تکمیل تعریف، باید به مفهوم‌سازی بپردازند: هر عدد مثبت دو ریشه چهارم دارد که قرینه یکدیگرند. عددهای منفی ریشه چهارم ندارند. در ادامه به عنوان تمرین کلاسی از دانش‌آموزان خواسته شده تا ضمن تکمیل جدول‌های

صفحه ۵۱ به محاسبه ریشه‌های چهارم و پنجم بپردازند.

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰,۰۰۰	۳۱۲۵
ریشه‌های چهارم	۲ و -۲	۵ و -۵	۱۰ و -۱۰	$۵\sqrt[4]{۵}$ و $-۵\sqrt[4]{۵}$

عدد	-۳۲	۱۵۶۲۵	۷۱	-۲۴۳	-۱	-۱۰ ^۵	۱۹
ریشه پنجم	-۲	۵	۲/۵	-۳	-۱	-۱۰	۱/۵

تنها عددهایی که ریشه پنجم آنها با خودشان برابر است ۱، -۱ و ۰ هستند. محاسبه کنید:

$$\sqrt[5]{\frac{۱}{۱۰۰,۰۰۰}} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\sqrt[5]{-۳۲} = -۲$$

$$\sqrt[5]{\frac{۱}{۳۲}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt[5]{-۰/۰۰۰۰۳۲} = -۰/۲$$

هر عدد مثبت یا منفی یک ریشه پنجم دارد. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد، ریشه پنجم آن منفی است.

روش: باید دانش‌آموزان را یاری کرد که خودشان کادر را تکمیل کنند. می‌توانند با مشاوره همدیگر پرسش‌ها را پاسخ دهند.

حل تمرین‌های برگزیده صفحه ۵۱

۱

$$\sqrt{۱۶} = ۴$$

$$۴ < \sqrt{۲۰} < ۵$$

$$-۶ < -\sqrt{۳۵} < -۵$$

$$۸ < \sqrt{۷۵} < ۹$$

$$\sqrt[3]{-۸} = -۲$$

$$۲ < \sqrt[3]{۲۰} < ۳$$

$$-۵ < \sqrt[3]{-۹۰} < -۴$$

$$۶ < \sqrt[3]{۲۵۰} < ۷$$

$$\sqrt[4]{۱۶} = ۲$$

$$-۳ < -\sqrt[4]{۲۰} < -۲$$

$$-۴ < -\sqrt[4]{۱۲۰} < -۳$$

$$۷ < \sqrt[4]{۴۰۰} < ۸$$

$$\sqrt[5]{۱} = ۱$$

$$\sqrt[5]{-۳۲} = -۲$$

$$۳ < \sqrt[5]{۴۰۰} < ۴$$

ریشه n ام

درس دوم

روش تدریس

هدف، تعمیم کلی مفهوم ریشه است. در ریاضیات وقتی فرایند یا عملی را برای اعداد \dots و 4 و 3 و 2 تعریف می‌کنیم، معمولاً برای همه اعداد طبیعی آن را گسترش می‌دهیم؛ لذا ناچاریم با متغیر n کار کنیم. کار تدریس ضمن یک فعالیت آموزشی شروع می‌شود. ریشه‌های مختلف عدد 64 در جدول آمده و از دانش‌آموزان خواسته می‌شود جدول را کامل کنند.

ریشه‌های دوم	ریشه سوم	ریشه‌های چهارم	ریشه پنجم	ریشه‌های ششم	...
$\sqrt{64} = 8$ $-\sqrt{64} = -8$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	$-\sqrt[6]{64}$ و $\sqrt[6]{64}$...

داریم: $\sqrt[6]{64} = 2$ و $-\sqrt[6]{64} = -2$

از دانش‌آموزان خواسته شود که با ذکر ریشه هفتم و هشتم 64 ، به عنوان عددهایی که وقتی به توان هفت یا هشت می‌رسند، برابر 64 شوند مفهوم ریشه را تعمیم دهند. بعد به جای هفت و هشت با n سخن بگویند! مانند ریشه‌های دوم و چهارم متوجه باشند که اعداد منفی ریشه زوج ندارند. و جدول بعدی را کامل کنند. تعریف کلی مفهوم در ذیل صفحه ۵۴ آمده است. در صفحه ۵۵ با تکمیل جدول مفهوم‌سازی تعمیم می‌گردد. برخی موارد آن، جهت راهنمایی نوشته شده‌اند. درس ضمن کار در کلاس (تمرین‌های کلاسی) ادامه می‌یابد.

در فعالیت بعدی (صفحه ۵۵) برخی قواعد ریشه ذکر شده‌اند. الهام‌بخش آن قواعدی است که برای ریشه‌های دوم و سوم از سال قبل آموخته‌اند.

– با ساختن مثال‌های عددی به قاعده برسند.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

– هدف فعالیت بعدی (صفحه ۵۷) آن است که از راه تجربی دریابند که تساوی

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

برای وقتی که n زوج است، همواره برقرار نیست

$$\sqrt[4]{(-2)^4} \neq -2$$

و رسیدن به این نکته است که

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad (n \text{ زوج})$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad (n \text{ فرد})$$

حل تمرین‌های برگزیده صفحه ۵۸

$$(\frac{0}{5})^2 > (\frac{0}{5})^3 \quad \sqrt{0/25} = \sqrt[3]{0/125} \quad 1$$

$$a^2 > a^3 \quad \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}, \quad 0 < a < 1 \quad \text{اگر}$$

۲ هرگاه $\sqrt[n]{a} = b$ ، طبق تعریف ریشه $b^n = a$ ؛ در نتیجه $(\sqrt[n]{a})^a = a$.

۵

$$\sqrt[5]{2^{-5}} = 2^{\frac{-5}{5}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2^7}} = \left(\frac{1}{2^7}\right)^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{3^{-3}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

۶ $n=3$ برقرار است. a, b را مثبت بگیرید. برقرار است.

ب) $n=4$ ، a و b را منفی بگیرید $\sqrt[4]{\frac{-2}{-32}}$ با معنا است و برابر $\frac{1}{4}$ می‌باشد، حال آنکه $\sqrt[4]{-2}$ و $\sqrt[4]{-32}$

بی معنا هستند.

توان‌های گویا

روش تدریس

درس با یک فعالیت که ضمن گفتمان دو نفر انجام می‌شود، شروع می‌شود. این پرسش مطرح می‌شود که توان $\frac{1}{2}$ عدد ۲ (پس از نیم ساعت کشت) چه عددی می‌تواند باشد. نتیجه می‌شود که هرگاه قرار دهیم $\sqrt{2} = b$ ، باید $b = \sqrt{2}$ باشد.

پس از آن برای هر عدد، توان کسری تعریف می‌شود:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a > 0 \text{ و } n \text{ عددی طبیعی باشد،}$$

توجه داشته باشید که در این سطح باید همواره a مثبت فرض شود. ما در اینجا توان کسری عددهای منفی را تعریف نمی‌کنیم؛ گرچه در ریاضیات عالی چنین امری ممکن می‌باشد.

تعمیم: وقتی کسر، یک کسر دلخواه مانند $\frac{m}{n}$ باشد.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

لذا توان کسری در حالت کلی تعریف شده است.

درس با فعالیت‌های کلاسی ادامه می‌یابد.

به دانش‌آموزان فرصت داده می‌شود تا این فعالیت‌ها را به کمک یکدیگر حل کنند. دبیر برای نمونه برخی را پاسخ می‌دهد تا مطمئن شود دانش‌آموزان موضوع درس را آموخته‌اند.

در همین صفحه (صفحه ۶۰) قواعد توان، برای توان‌های گویا، ذکر شده‌اند که عیناً همانند این قواعد برای توان‌های طبیعی‌اند.

$$(ab)^r = a^r b^r, \quad a^r \times a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

به دانش‌آموزان فرصت داده شود تمرین‌های کلاسی صفحه ۶۱ را مانند نمونه‌ها حل کنند.

هدف فعالیت این صفحه که به صورت گفتمان است، هدایت دانش‌آموزان به اینکه تساوی $\sqrt[n]{a^n} = a$

همواره برقرار نیست و اینکه وقتی n زوج است :

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

حل تمرین‌های برگزیده صفحه ۶۳

۱

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$$

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$$

$$(4^2)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$$

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25}$$

$$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16}$$

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 3^1 = 3$$

$$3^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$17^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{17^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sqrt[n]{a^2} = a^{\frac{2}{n}}$$

$$\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad ۲$$

۳ تساوی زیر برقرار است :

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

۴ هدف رسیدن به این قاعده از راه آزمون‌های عددی است. (s و r گویا و a مثبت) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

۵

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[9]{64} = 2$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

عبارت‌های جبری

درس چهارم

روش تدریس

هدف، تعمیم درس مشابه از کلاس نهم است. ابتدا مفهوم اتحاد و عبارت جبری را یادآوری کنید. دانش‌آموزان را وادار کنید که اتحادهایی را یاد گرفته‌اند مرور کرده و به زبان فارسی نیز بیان کنند:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad (2)$$

ضمن فعالیت کلاسی، این اتحادها را تعمیم دهید:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (\quad)(a+b) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

b را به -b تبدیل می‌کنند:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

توجه کنند که جملات یک در میان با علامت مثبت و منفی ظاهر می‌شوند. به دانش‌آموزان گفته می‌شود که ضرب دو جمله‌ای در چند جمله‌ای (یا چندجمله‌ای در چندجمله‌ای) جمله به جمله انجام می‌شود؛ هر جملهٔ اولی در همه جملات دیگری:

تمرین کنند:

$$(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1}) = \dots$$

— جملات قرینه حذف شده و به دست می‌آید:

$$= a^n + b^n$$

مشابهً

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n$$

با مثال‌های عددی (مقدار مشخص برای n) کار ادامه می‌یابد. می‌توانید در همین مرحله مفاهیم تجزیه و عامل (شمارنده) را توضیح دهید. وقتی یک اتحاد را از طرف دوم، شکل مختصر آن بنویسیم؛ مانند:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

گوییم عبارت سمت چپ به حاصل ضرب دو عامل سمت راست تجزیه شده است. هریک از این دو پیرانتز را یک عامل (شمارنده) $a^n - b^n$ می‌نامیم. عیناً مانند تجزیه اعداد طبیعی به شمارنده‌ها. البته ممکن است عبارتی تجزیه نشود، مگر به حاصل ضرب خودش در عدد ۱

$$x^2 + y^2 = (x^2 + y^2) \times 1 \quad 17 = 17 \times 1$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

برخی عبارت‌ها عیناً مانند اتحادها نیستند، لکن با اندک تأمل و تفکری می‌توان از اتحادها برای تجزیه آنها استفاده کرد؛ مانند مثال‌های ۱ و ۲ ص ۶۴. واژه مضرب در عبارت‌های جبری همانند مضرب در حساب اعداد است. وقتی عبارتی را به عبارت‌های با درجه کوچک‌تر تجزیه می‌کنیم، گوییم آن عبارت مضرب عبارت‌های به دست آمده می‌باشد.

دانش‌آموزان را وادار کنید که عبارت‌سازی کنند. مانند آنکه سه عبارت بسازند که مضرب $a+b$ و یا مضرب $a-b$ باشند.

تعریف عبارت گویا در صفحه ۶۶ آمده است. عبارت‌های الف و ب این صفحه گویا و ب و ت گنگ

هستند.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

مخرج کسر، با ضرب صورت و مخرج در عبارت مناسب، گویا شده است.

$$\frac{2}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

پس مخرج مشترک سه کسر $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ و $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ و عبارت $x-1$ است.

تمرین‌های صفحه ۶۷ برای آشنایی و ممارست دانش‌آموزان در گویا کردن مخرج‌ها می‌باشند که با راهنمایی دبیران محترم، در صورت لزوم، انجام می‌دهند.

حل تمرین‌های برگزیده صفحه ۶۷

۱

$$x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

$$= (x-y)(x^r+xy+y^r)(x+y)(x^r-xy+y^r)$$

x^r+y^r تجزیه نمی‌شود.

۲

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}$$

$$= \frac{\alpha}{x-y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{4x}+\sqrt{64}}{(\sqrt{x}-\sqrt{4})(\sqrt{x^2}-\sqrt{4x}+\sqrt{64})} = \frac{\alpha}{x-4}$$

(ت)

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1} - \frac{5x}{x-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2-5x}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}-5x-1}{x-1}$$

$105^2 = 100^2 + 1000 + 25$ (ذهنی)

$= 11025$

$99^2 = (100-1)^2 = 10000 - 200 + 1$ (ذهنی)

$= 9801$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x-1} + \frac{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[4]{x^6} + \sqrt[4]{x^5} + \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1}{x-1}$$

الگوها:

$$x-1 = (\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)$$

$$a^r+b^r = (a-b)(a^r+a^r b+ab^r+b^r)$$

$$a^r-b^r = (a-b)(a^r+a^r b+a^2 b^r + a^r b^r + a^r b^2 + a^2 b^2 + ab^r + b^r)$$



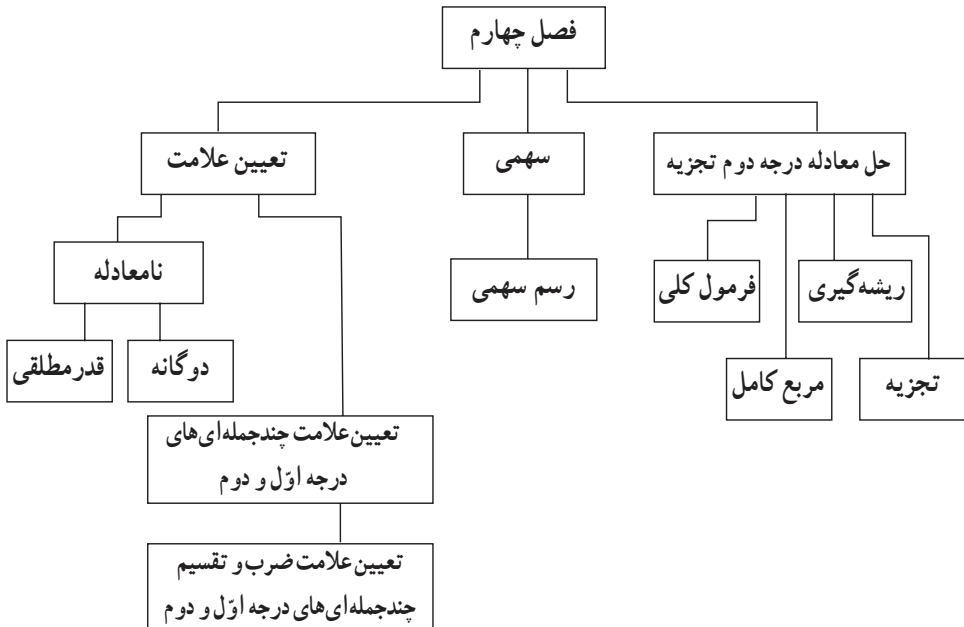
فصل ۴

معادله‌ها و نامعادله‌ها

نگاه کلی به فصل

این فصل، شامل سه درس است. ابتدا مفهوم معادله درجه دوم را بیان می‌کند و سپس روش‌های حل معادله درجه دوم را به چهار روش (تجزیه، ریشه‌گیری، مربع کامل، فرمول کلی) بررسی کرده است و در درس دوم روش رسم سهمی را ارائه می‌کند. در درس سوم تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها از درجه ۱ و ۲ را آموزش می‌دهد. در روند یادگیری این درس دانش‌آموز باید با حل معادله درجه دوم و درجه اول کاملاً آشنایی داشته باشد و در ادامه حل نامعادلات پرداخته می‌شود. سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده است. در ادامه به حل نامعادلات دوگانه و قدر مطلق پرداخته می‌شود.

نقشه مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

جبر از شاخه‌های اصلی علم ریاضیات است که تاریخی بیش از ۳۰۰۰ سال دارد. این علم در طول تاریخ سؤالات بسیار داشته و در حال حاضر شامل شاخه‌های زیادی است.

این علم به بیش از ۳۰۰۰ سال پیش در مصر و بابل برمی‌گردد و در آنجا در مورد حلّ برخی از معادلات خطی بحث شده است. در هند و یونان باستان نیز، حدود یک قرن پیش از میلاد از روش‌های هندسی برای حل برخی از معادلات جبری استفاده می‌کردند. در قرن اول میلادی نیز بحث در مورد برخی از معادلات جبری در آثار «دیوفانتوس» یونانی و «برهماگوپتای» هندی دیده می‌شود.

کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی اولین اثر کلاسیک در جبر می‌باشد که کلمه جبر یا Algebra از آن آمده است. «خیام» دیگر ریاضی‌دان مشهور ایرانی است که در آثار خود جبر را از حساب تمیز داد. گامی بزرگ را در تجربه و پیشرفت این علم برداشت. در قرن ۱۶ میلادی روش حلّ معادلات درجه سوم توسط «دل مرو» و معادلات درجه چهارم توسط «فراری» کشف گردید.

«واریس‌ت گالوا» ریاضی‌دان فرانسوی که در بیست سالگی در جریان انقلاب فرانسه در یکی از جنگ‌ها کشته شد، بیشترین سهم را در پیشرفت و تجربه این علم داشت که نوشته‌های او سال‌ها پیش از مرگش، پس از مطالعه و بررسی توسط دیگر ریاضی‌دانان موجب تحوّل عظیم در این علم گردید.

معادلات همراه با اعداد، از اولین دستاوردهای ریاضی شدند. آنها در قدیمی‌ترین اسناد ریاضی مکتوب، فی‌المثل، در متون میخی بابلی‌های باستان که به هزاره قبل از میلاد برمی‌گردند، پاپيروس‌های مصری باستان که به امپراطوری میانه در حدود ۱۸۰۰ ق.م. بازگشت دارند، آمده‌اند.

بنا به ساختار جامعه بابلی مسائل مربوط به تقسیم ارث از اهمیت بسیار برخوردار بودند. اولین پسر همواره سهم بیشتری را دریافت می‌کرد، دومی بیشتر از سومی و به همین ترتیب. در حالی که مسائل مطرح در بابل، مجهول نسبتاً واضح توصیف شده است. در پاپيروس‌های مصری با علامت «h» نمایش داده شده است.

علامت برابری «=» که امروزه متداول است، توسط «روبرت رکورد» پزشک دربار سلطنتی مطرح شد. اما زمان قابل ملاحظه‌ای طول نکشید تا این علامت مقبولیت عام یافت.

استفاده از ابزار فناورانه

دانش‌آموزان می‌توانند برای به‌دست آوردن جواب‌هایی که به‌صورت اعشاری از معادله درجه دوم به‌دست می‌آیند از ماشین حساب استفاده کنند. برای رسم منحنی سهمی انواع نرم‌افزارها وجود دارند که با وارد کردن معادله می‌توان نمودار را رسم کرد و می‌توان اشکال مختلف سهمی را مشاهده کرد. نرم‌افزاری مانند FXDraw و... با چنین نرم‌افزارهایی می‌توان فعالیت‌ها، کاردرکلاس، تمرینات را شبیه‌سازی کرد تا دانش‌آموزان درک بهتری نسبت به مفاهیم معادلات و نامعادلات پیدا کنند.

معرفی منابع برای معلمان

- ۱ جبر و مقابله / محمدبن موسی خوارزمی ترجمه حسین خدیوچم / انتشارات اطلاعات
- ۲ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر / انتشارات مدرسه
- ۳ عبارات‌ها و معادله‌های جبری / علی حسن‌زاده ماکویی / انتشارات مدرسه
- ۴ تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

- ۱ معادلات زیر را حل کنید.
 - الف) $۱۶x(x-۲) = ۸x-۲۵$
 - ب) $(۲x-۳)^۲+۱ = ۱۰$
 - ج) $x^۲ + \sqrt{۵}x + ۱ = ۰$
- ۲ دو برابر یک عدد مثبت، از ثلث مربع آن، ۹ واحد کمتر است؛ این عدد را به‌دست آورید.
- ۳ مجموع سن پدر و پسر ۵۰ سال و حاصل ضرب سن آنها ۳۳۶ است. سن هرکدام را به‌دست آورید.
- ۴ اگر معادله $x^۲+(a-۱)x+۱ = ۰$ ریشه مضاعف داشته باشد، a را یافته و سپس ریشه‌های مضاعف را تعیین کنید.
- ۵ یک رشته سیم به طول ۸ متر در اختیار داریم. می‌خواهیم آن را به دو قسمت تقسیم کنیم و سپس با هرکدام یک مربع بسازیم. اگر مجموع مساحت این مربع‌ها، ۲ مترمربع باشد، طول هرکدام را به‌دست آورید.
- ۶ معادله زیر، رابطه بین سن یک زن (A) و فشارخون سیستولیک نرمال آن، P (میلی متر جیوه) است:

$$P = ۰/۰۱A^۲ + ۰/۰۵A + ۱۰۷$$

الف) فشارخون نرمال را برای یک زن ۶۰ ساله به دست آورید.

ب) اگر فشارخون نرمال یک زن، ۱۳۰ میلی لیتر جیوه باشد، سن تقریبی او را به دست آورید.

۷ نمودار هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=1-x^2$

ب) $y=-x^2+4x+1$

ج) $y=1+4x-2x^2$

۸ نمودار چندجمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$ ، محور تقارنی به معادله $x=4$ دارد. اگر خط $y=1$ این

سهمی را در دو نقطه قطع کند و یکی از این نقاط، نقطه $A(1, -2)$ باشد، نقطه دیگر برخورد را تعیین کنید.

۹ یک موشک از روی زمین با معادله $y=-2x^2+20x$ به هوا پرتاب می‌شود، که در آن، x مسافت

افقی طی شده و y ارتفاع آن در لحظات مختلف است.

الف) بیشترین ارتفاع موشک چقدر است؟ در این لحظه، مسافت افقی طی شده را نیز به دست آورید.

ب) برد این موشک را به دست آورید.

ج) نمودار حرکت این سهمی را در یک دستگاه مختصات، رسم کنید و جواب‌های به دست آمده در

قسمت‌های قبل را روی آن نشان دهید.

۱۰ شکل‌های زیر، نمودار چند سهمی با معادله $y=ax^2+bx+c$ می‌باشد. برای ضریب x^2 ی آنها کدام یک

از اعداد زیر را پیشنهاد می‌کنید.

$a=2, a=1, a=-1, a=-2$



۱۱ هریک از نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب به دست آمده را با استفاده از بازه‌ها نمایش

دهید.

الف) $-1 \leq 2x - 5 \leq 7$

ب) $\frac{x}{3} - 1 \leq \frac{2}{3}x + 1 < x$

ج) $(2-x)(x^2-9) \geq 0$

د) $\frac{x^3-1}{x^2+x-6} < 0$

$$(ه) |x - 2| \leq 3$$

$$(و) |2x + 5| > 1$$

$$(ز) |3x + 1| + 2 < 1$$

۱۲ بازه‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی رسم کنید و سپس برای هر کدام یک نامعادله قدرمطلق بنویسید که مجموعه جواب آن، این بازه باشد.

(الف) $[0, 4]$

(ب) $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

۱۳ اگر عبارت $y = (a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ برای هر مقدار x ، منفی باشد، حدود مقادیر a را به دست آورید.

۱۴ در بررسی رابطه بین ساعت خواب در شبانه‌روز و نرخ مرگ در سال (برابر هر یک صد هزار نفر انسان بالغ) اطلاعات زیر به دست آمده است:

x (ساعت خواب)	y (نرخ مرگ در سال)
۴	۱۶۸۲
۷	۶۲۸
۹	۹۶۸

می‌توانیم این اطلاعات را به صورت معادله $y = ax^2 + bx + c$ مدل‌سازی کنیم و سهمی زیر را به دست آوریم:

$$y = 10.4/5x^2 - 150.1/5x + 60.16$$

(الف) نرخ مرگ در سال را برای افراد بالغی که در شبانه‌روز، ۶ ساعت می‌خوابند، به دست آورید.

(ب) پایین‌ترین میزان نرخ مرگ در سال، به ازای چند ساعت خواب در شبانه‌روز، به دست می‌آید.

معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

اهداف

- معادله درجه دوم را به خوبی تشخیص دهد.
- به راحتی بتواند فاکتورگیری از عوامل مشترک را انجام دهد.
- از تجزیه عبارات‌های درجه دوم با استفاده از اتحادهای مزدوج و جمله مشترک برای حل معادله درجه دوم استفاده نماید.
- ویژگی حاصل ضرب صفر را به خوبی درک کند و بتواند در مواقع لزوم به کار برد.
- درک دقیق و کاربردی از ریشه‌گیری داشته باشد.
- در صورت امکان بتواند یک عبارت را مربع کامل نماید.
- بتواند هر معادله درجه دوم دلخواه را از فرمول کلی حل کند.
- حالت‌های مختلف جواب‌های یک معادله درجه دوم را برحسب علامت Δ ، تشخیص دهد.
- با کاربرد این معادله در عصر حاضر آشنا شود.

روش تدریس

در آغاز این درس، یک مسئله مطرح می‌شود که طی آن، دانش‌آموز با معادله درجه دوم آشنا می‌شود. سؤالی که در ابتدای درس مطرح می‌شود که آیا می‌توان مثلث قائم‌الزاویه دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی غیر از ۳ و ۴ و ۵ باشند؟ شما می‌توانید با همین موضوع درس را شروع کرده و دانش‌آموزان را به چالش بکشید، سپس معادله $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$ را پای تخته نوشته و از آنها بخواهید آن را ساده کنند. سپس معادله $x^2 - 2x - 3 = 0$ که به دست آمد، معادله درجه دوم را تعریف کرده و از آنها بخواهید چند معادله درجه دوم دیگر مثال بزنند و در دفترهایشان بنویسند. فعالیت صفحه ۷۱ را می‌توانید به عهده دانش‌آموزان

بگذارید. ویژگی حاصل ضرب صفر را کامل توضیح داده و چند مثال برایشان بیاورید. فاکتورگیری را نیز می‌توانید با تمرین‌هایی مثل کار در کلاس صفحه ۷۱، قسمت ب در دانش‌آموزان تقویت کنید. مفهوم ریشه‌گیری از عبارات درجه دوم در صفحه ۷۲ را سعی کنید با چند مثال جبری و در صورت امکان مثال‌های کاربردی برای دانش‌آموزان توضیح کامل دهید.

این مفهوم باید با تأکید زیاد، تدریس شود که یکی از نقاط ضعف دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر است. در قسمت «حلّ معادله درجه دوم به روش مربع کامل» باید دانش‌آموزان این توانایی را پیدا کنند که عباراتی مانند x^2+ax را به صورت $x^2+ax+\frac{a^2}{4}$ یا همان $(x+\frac{a}{2})^2$ دریاورند. مثال‌هایی مانند مثال صفحه ۷۳ این مهارت را در آنها تقویت می‌کند. سپس ریشه‌گیری را در انتهای پاسخ خود به صورت کامل انجام دهند و پاسخ را به دست آورند. کار در کلاس صفحه ۷۴ نیز می‌تواند یاری‌رسان شما در تفهیم این موضوع به شاگردانتان باشد. حلّ معادله درجه دوم به روش فرمول کلی که در صفحه ۷۴ بحث آن شروع شده باید به عنوان آخرین راه حل به دانش‌آموز ارائه شود. چرا که در بسیاری از مسائل استفاده از تجزیه، مربع کامل و همچنین ریشه‌گیری، سرعت حل را بالا می‌برد. اما دانش‌آموزان باید روش کلی را نیز به خوبی و با درک فرایند آن به طور کامل فراگیرند، تا بتوانند در موقع لزوم از آن استفاده نمایند.

در ادامه تأکید می‌شود که حتماً روی علامت‌های Δ بحث کنید و حالت‌های مختلف حلّ معادله را در حالت‌هایی که دل‌تا منفی، صفر یا مثبت باشد، بررسی کنید و مثال بزنید. در این زمینه می‌توانند فعالیت صفحه ۷۴ و کار در کلاس شماره ۱ صفحه ۷۵ را کامل کنند.

کار در کلاس شماره ۲ صفحه ۷۵ و مثال‌هایی شبیه آن می‌توانند به عنوان تمرین این قسمت در کلاس حل شوند. مثال صفحه ۷۶، یک نمونه از مثال‌های کاربردی و جذاب از معادلات درجه دوم اند و می‌توانند برای تنوع دادن به تدریس به کار روند.

برای تمرین‌های صفحه‌های ۷۶ و ۷۷ وقت کافی بدهیم تا دانش‌آموزان با حلّ تمرین‌های ۶ تا ۱۱ به کاربرد این درس مسلط شوند.

سهمی

درس دوم

اهداف

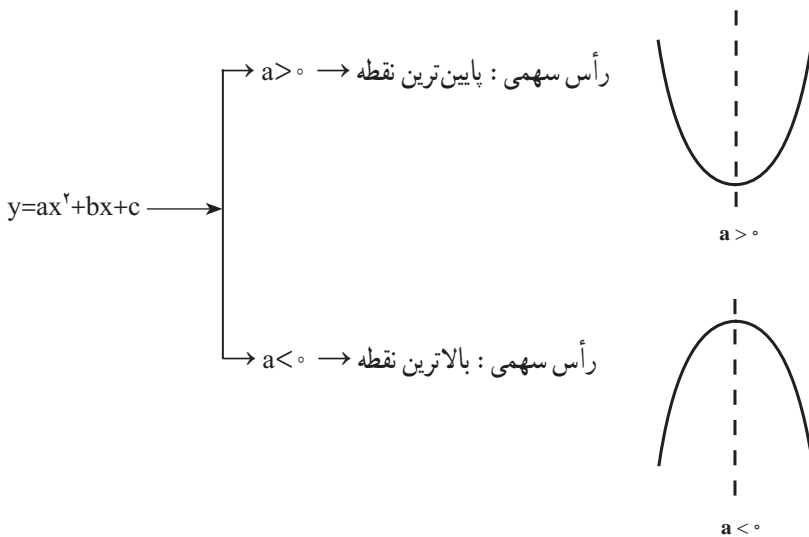
- شکل کلی سهمی را با استفاده از ضریب a ، قبل از رسم بداند.
- سهمی را با استفاده از مربع کامل کردن و نقطه‌یابی رسم کند.
- مختصات رأس سهمی را قبل از رسم بنویسد.
- معادلهٔ محور تقارن را قبل از رسم بنویسد و آن را رسم کند.
- سهمی را با استفاده از ضرایب آن و نقطه‌یابی رسم کند.
- اهمیت رأس سهمی را به‌عنوان نقطه‌ای که می‌توان از آن ماکزیمم یا مینیمم عبارتی را تعیین کرد، درک کرده و از آن استفاده کند.

روش تدریس

در ابتدای درس سهمی، بهتر است با خلاصه‌ای دربارهٔ تاریخچه و کاربردهای سهمی شروع شود: «اسحاق نیوتن از سهمی برای محاسبهٔ مدار شهاب‌سنگ‌ها استفاده می‌کرد. گالیله نشان داد که وقتی جسمی را در هوا پرتاب می‌کنیم، مسیر حرکت آن سهموی است. نیوتن و گرگوری نشان دادند که هنگامی که نور به‌صورت موازی به یک آینه سهموی تابانده شود، پس از انعکاس در کانون آن جمع می‌شود. پاسکال سهمی را تصویر یک دایره در نظر گرفت. اقتصادی‌ترین شکل پل کمانی، در اغلب شرایط سهمی است.» همچنین می‌توانید از جلسهٔ قبل به دانش‌آموزان بگویید که یک مخروط کاغذی درست کنند و همراه خودشان بیاورند. و بعد سر کلاس حدس بزنند که در صورت تقاطع یک صفحه با مخروط چه شکلی به‌وجود می‌آید. از مثال‌های کاربردی مانند مسیر پرش یک اسکی‌باز، یا مسیر حرکت توپ بسکتبال نیز می‌توانید برای

توضیح شکل سهمی و آشنایی دانش‌آموزان با آن استفاده کنید. تقدّم و تأخّر این مقدمات سلیقه‌ای است. در آغاز درس در صفحه ۷۸ فعالیتی آورده شده است که معادله $y=x^2-4$ و نمودار آن را بررسی می‌کند. پنج نقطه که طول‌های کوچکی دارند در نظر گرفته و در معادله قرار داده و عرض آنها را به دست آورید. سپس نقاط را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و به هم وصل کنید. در همین فعالیت، مفهوم رأس سهمی و محور تقارن آن را برای شاگردان توضیح دهید و تذکر دهید که می‌توانند با حداقل سه نقطه، سهمی را رسم کنند.

ارتباط بین نمودار سهمی و معادله سهمی در صفحه ۷۹ توضیح داده شده است. همچنین ارتباط بین ضریب x^2 یعنی a با شکل سهمی نیز در همان صفحه آورده شده است.



توصیه می‌شود: فعالیت صفحه ۷۹، یا مثالی شبیه آن حتماً حل نمایید و حداقل دو سهمی با استفاده از مربع کامل کردن رسم کنید.

«شکل کلی ضابطه سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$, $(a \neq 0)$ است که رأسی به مختصات (h, k) و محور تقارنی با معادله $x = h$ دارد.»

این تعریف در صفحه ۸۰ آمده که بهتر است در کار در کلاس پس از آن، مختصات رئوس را خود دانش‌آموزان به دست آورده و سهمی را رسم نمایند. فعالیت صفحه ۱۲ از نظر مفهومی بسیار مهم بوده و بهتر است دانش‌آموزان سعی کنند معادله کلی سهمی را که به صورت $y=ax^2+bx+c$ می‌باشد، مربع کامل کنند و به تساوی زیر برسند:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

سپس با استفاده از شکل کلی $y=(x-h)^2+k$ و رأس سهمی به صورت (h,k) ، نشان دهند که:

$$-h = \frac{b}{2a} \rightarrow h = -\frac{b}{2a}, \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

پس رأس هر سهمی به صورت $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ می‌باشد و معادله محور تقارن که در شکل کلی به صورت $x=h$ است، به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ درمی‌آید.

پس از این فعالیت، دانش‌آموز باید این توانایی را داشته باشد که مثال‌هایی شبیه مثال صفحه ۸۰ را حل کند و با داشتن معادله سهمی و قبل از رسم آن، مختصات رأس سهمی و معادله محور تقارن سهمی را نوشته و سپس سهمی را رسم نماید.

فعالیت صفحه ۸۱، قسمتی از درس را بازگو می‌کند و بر این موضوع تأکید می‌کند که ضرایب x^2 اگر بزرگ‌تر از واحد باشند، دهانه سهمی بسته‌تر و اگر کمتر از واحد باشند، دهانه سهمی بازتر خواهد شد. این موضوع حتماً برای دانش‌آموزان شفاف شود. تمرین‌های صفحه ۸۱ و صفحه ۸۲ را برای جلسه آتی در نظر بگیرید.

تعیین علامت

درس سوم

اهداف

- چند جمله‌ای‌های درجه اول و دوم را تعیین علامت نماید و مشخص کند در چه بازه‌ای مثبت، در چه بازه‌ای منفی و به ازای کدام مقادیر متغیر، صفر است.
 - عبارات‌های شامل چند جمله‌ای‌های درجه اول و دوم را تعیین علامت نماید و مشخص کند در چه بازه‌ای مثبت، در چه بازه‌ای منفی و به ازای کدام مقادیر متغیر، صفر است.
 - نامعادله دوگانه را با عبارت خواص جمع و ضرب حل کرده و مجموعه جواب را به صورت بازه و روی محور اعداد حقیقی مشخص کند.
 - نامعادله با عبارات درجه ۲ را با دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کند و مجموعه جواب را به صورت بازه و روی محور اعداد حقیقی مشخص کند.
 - مفهوم نامعادله قدرمطلق (درجه اول) را به صورت هندسی بداند و بتواند با خواص جبری، مجموعه جواب را به دست آورد.
 - با مسائل کاربردی که شامل تعیین علامت چند جمله‌ای‌های درجه دوم است، آشنا شود.
- تعیین علامت عبارات جبری در این کتاب به دو قسمت چند جمله‌ای درجه اول و چند جمله‌ای درجه دوم تقسیم می‌شود که یکی از اساسی‌ترین قسمت‌های ریاضی پایه است و اهمیت آن ناشی از کاربردش در حل نامعادلات و پیدا کردن دامنه و برد توابع است.

بخش اول: تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول

تعیین علامت در آغاز درس با مثالی کاربردی شروع می‌شود که در آن می‌خواهد عبارت $5x - 20$ را تعیین علامت نماید. اگر تعداد کالای تولید شده را x فرض کنیم، سود حاصل برای شرکت تولیدی مفروض، از این عبارت به دست می‌آید.

برای تفهیم این موضوع ابتدا چند مقدار دلخواه برای x را در نظر گرفته و در عبارت $p(x)$ قرار داده و جدولی برای آن می‌کشیم. عدد 40 را نیز در آن قرار داده و دو عدد قبل و دو عدد بعد از آن را می‌نویسیم مشخص است که برای اعداد بزرگ‌تر از 40 ، مقادیر، علامت مثبت و برای اعداد کوچک‌تر از 40 ، مقادیر، علامت منفی اختیار خواهند کرد و به ازای عدد 40 مقدار $p(x)$ برابر صفر خواهد بود. می‌توان برای دانش‌آموزان به این صورت استنباط نمود که اگر این شرکت دقیقاً 40 کالا تولید نماید، هیچ سودی به دست نمی‌آورد و اگر بیشتر از 40 کالا تولید کند به سوددهی می‌رسد و چنان که کمتر از 40 کالا تولید نماید، این شرکت متضرر خواهد شد. از جدول تعیین علامت صفحه ۸۳ نیز می‌توان در پایان این مثال بهره برد.

همان‌طور که مشخص است این مثال، نمایانگر عینی از کاربرد تعیین علامت در مسائل اقتصادی است که می‌توان شبیه آن تمرینی طرح کرد که توسط دانش‌آموزان حل شود. در فعالیت صفحه ۱۵ نمودار دو خط $y = 2x - 6$ و $y = -2x + 6$ رسم شده است و با استفاده از آن، y ، تعیین علامت شده است. در این فعالیت سعی شده دانش‌آموز با رویکردی هندسی به تعیین علامت فکر کند. در حالت کلی دو جمله‌ای درجه اول را به حالت عمومی $y = ax + b$ که در آن $a \neq 0$ نمایش می‌دهیم و هدف از تعیین علامت دو جمله‌ای این است که مقادیری حقیقی برای x بیابیم که به ازای آنها دو جمله‌ای، $+$ یا $-$ یا به ازای یک مقدار x برابر با 0 شود که به کمک جدول زیر که جدول تعیین علامت نامیده می‌شود این کار را انجام می‌دهیم؛

$$y = ax + b \rightarrow ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

در ادامه در صفحه ۸۴ مثال ساده‌ای نیز آورده شده که با رویکرد صرفاً جبری و با استفاده از جدول فوق نوشته شده است. تعیین علامت عبارت‌های شامل عامل‌های درجه اول در مثال صفحه ۸۵ نوشته

شده که در آن، هدف تعیین علامت عبارت $A=(2x-1)(3-x)$ است، ابتدا به صورت جداگانه هر عبارت را تعیین علامت می‌کنیم و سپس اطلاعات این دو جدول را در یک جدول می‌نویسیم و علامت عبارت A را نیز از حاصل ضرب علامت‌های سطر اول و دوم به دست می‌آوریم. توصیه می‌شود تمرین‌های مشابه این مثال سرکلاس حل شود. کار در کلاس صفحه ۸۵ شامل چهار قسمت می‌باشد که قسمت الف مشابه مثال صفحه ۸۵ است. قسمت ب یک عبارت پرانتزی با درجه دوم است که حتماً باید برای دانش‌آموزان توضیح دهید که عبارات جبری با درجه زوج همراه علامت + دارند و فقط در ریشه عبارت داخل پرانتز، صفر می‌باشند. قسمت ج نیز حاصل ضرب x^2 در یک عبارت درجه اول است که همانند قبل این موضوع برای شاگردان شفاف شود که عبارات با درجه فرد، دارای علامتی همانند عبارات با درجه ۱ می‌باشند. در نهایت در قسمت د، حاصل تقسیم دو عبارت درجه ۱ است که مفهوم «تعریف نشده» در حاصل تعیین علامت کسر در این مثال مشخص می‌گردد.

بخش دوم : تعیین علامت چند جمله‌ای درجه دوم

شکل کلی چند جمله‌ای‌های درجه دوم به صورت $p(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن a, b, c اعداد حقیقی بوده و $a \neq 0$ ، با توجه به توضیحات همین فصل داریم:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

که با توجه به علامت Δ ، تعداد ریشه‌های $p(x) = 0$ متفاوت خواهد بود.

حالت اول: $\Delta > 0$

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$= a\left[\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

که با فرض $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ داریم:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

حال فرض می‌کنیم $x_1 < x_2$ در این صورت علامت $P(x)$ برای مقادیر مختلف x ، طبق جدول زیر تعیین می‌شود:

x		x_1		x_2	
$P(x)$	a	⊖	a	⊖	a

زیرا:

❶ اگر $x < x_1$ باشد؛ چون $x_1 < x_2$ بنابراین $x < x_2$ نیز می‌باشد، پس:

$$P(x) = a \underbrace{(x - x_1)}_{< 0} \underbrace{(x - x_2)}_{< 0} \rightarrow P(x) \text{ هم علامت } a \text{ خواهد بود.}$$

❷ اگر $x_1 < x < x_2$ باشد: $P(x)$ علامتی مخالف علامت a خواهد داشت.

❸ اگر $x > x_2$ ، چون $x_1 < x_2$ بنابراین $x > x_1$ نیز می‌باشد، پس:

$$P(x) = a \underbrace{(x - x_1)}_{> 0} \underbrace{(x - x_2)}_{> 0} \rightarrow P(x) \text{ هم علامت } a \text{ خواهد بود.}$$

حالت دوم: $\Delta = 0$: در این حالت خواهیم داشت:

$$P(x) = a \left(x_1 + \frac{b}{2a} \right) \left(x_2 + \frac{b}{2a} \right) = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

در این حالت دو ریشه با مقادیر مساوی یا اصطلاحاً یک ریشه مضاعف داریم. بنابراین، جدول تعیین علامت $P(x)$ به صورت زیر خواهد بود:

x		$x_1 = x_2$	
$P(x)$	a	⊖	a

حالت سوم: $\Delta < 0$: در این حالت، معادله $P(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد و از آنجایی که داریم:

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

و $\Delta < 0$ ، پس عبارت داخل کروشه همواره + خواهد بود و علامت $P(x)$ همان علامت a است.

این مفهوم برای حل مسائلی که تعیین پارامترها و حدود آنها را می‌خواهند و شرط $P(x)$ همواره $+$ یا همواره $-$ را دارند به کار می‌رود. توجه دانش‌آموزان به این نکته حتماً جلب شود که دو حالت داریم:

$$۱) P(x) > 0 \rightarrow \Delta < 0, a > 0$$

$$۲) P(x) < 0 \rightarrow \Delta < 0, a < 0$$

مثال صفحه ۸۷ نیز پس از آوردن ریشه‌های معادله داده شده در حالت $\Delta > 0$ ، عبارت A را تعیین علامت می‌نماید.

مثال و کار در کلاس صفحه ۸۷ نیز مثال‌هایی برای تعیین علامت، عباراتی شامل عوامل درجه اول و درجه دوم می‌باشند که کل این مسائل و مسائلی شبیه آن توصیه می‌گردد.

نامعادله

نامعادله به‌عنوان آخرین مبحث این فصل قرار گرفته است و از آنجایی که دانش‌آموزان در سال نهم با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اند، ابتدا نحوه خواندن نامعادلات را یادآوری کرده است. سپس خاصیت جمع و خاصیت ضرب در نامعادلات توضیح داده شده است. مثال صفحه ۸۹ یک مثال ساده از نامعادله با عبارات درجه اول می‌باشد که با استفاده از خواص جمع و ضرب حل شده و مجموعه جواب این نامعادله به‌صورت مجموعه و بازه و نمایش هندسی نشان داده شده است.

صفحه ۸۹ این فصل با بحث «نامعادله دوگانه» آغاز می‌شود که یک عبارت جبری به‌صورت مثال آورده شده و در دو نامعادله جداگانه بین دو عدد قرار داده شده، برای حل، دو راه پیشنهاد داده شده است: راه اول: دو نامعادله حل شود و بین جواب‌ها اشتراک گرفته شود. راه دوم: ترکیب دو نامعادله باهم است که به‌صورت یک نامساوی دوگانه نوشته می‌شود و سپس با استفاده از خواص جمع و ضرب، حدود x تعیین می‌شود. همچنین این نکته هم گفته شده که نامعادله دوگانه را به‌صورت دستگاه نامعادلات نیز می‌توان نشان داد.

کار در کلاس صفحه ۹۰ نیز مثالی برای نامعادله دوگانه می‌باشد که حل آن توصیه می‌گردد. فعالیت صفحه ۹۰ یک چندجمله‌ای درجه دوم مثال زده و نمودار آن را رسم نموده است. سپس با استفاده از نمودار مفهوم منفی بودن را ارائه می‌کند و با جدول تعیین علامت نیز بر این موضوع تأکید می‌نماید. کار در کلاس صفحه ۹۰ نیز چند مثال در همین رابطه آورده که به دو روش هندسی و با جدول تعیین علامت، نامعادله با چندجمله‌ای درجه دوم را حل کرده است. در مثال صفحه ۹۰ یک چندجمله‌ای درجه دوم با پارامتر مجهول به‌عنوان ضریب x ارائه داده که حدود این پارامتر را با شرط همواره مثبت بودن چندجمله‌ای خواسته و با شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$ و حل نامعادله $m^2 - 4 < 0$ ، با استفاده از جدول تعیین علامت، آن را حل

نموده است. مثال صفحه ۹۱ یک نامعادله به صورت $\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0$ آورده که ترکیبی با عوامل درجه اول و

دوم می‌باشد و با استفاده از جدول تعیین علامت، عبارت $\frac{x^2 - 9}{2x + 1}$ را تعیین علامت نموده است، و در سطر آخر هر جا که کسر بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، در مجموعه جواب نامعادله قرار داده است.

حل نامعادلات قدر مطلق، پس از این مثال به عنوان آخرین مبحث این فصل در صفحه ۹۱ آورده شده که در ابتدا به مفهوم نامعادله قدر مطلق با یک نامعادله ساده به صورت $|x| \leq 3$ اشاره شده و اعدادی که در این نامعادله صدق می‌کنند، روی محور نشان داده شده است و به صورت بازه نیز با جای خالی داده شده است. همچنین نامعادله $|x| \geq 3$ نیز به همین اشکال آورده شده است. سپس در ادامه نامعادلات قدر مطلق به صورت نامعادله‌های دوگانه و مجموعه جواب ذکر شده‌اند و در نهایت به صورت یک قاعده کلی گفته شده است. مثال صفحه ۹۲ نیز با استفاده از همین قاعده دو نامعادله را مثال زده و به صورت نامعادله دوگانه مجموعه جواب را به صورت بازه و همچنین روی محور اعداد حقیقی نشان داده است. دقت کنید که قسمت اول به روش هندسی نیز حل شده است. کار در کلاس صفحه ۹۳ نیز دارای چهار قسمت است که قسمت‌های الف و ب سؤال ۱ همانند مثال قبل از قاعده مذکور حل می‌شوند و سؤال ۲ و ۳، سؤالات جالبی هستند که در واقع پاسخ آورده شده و صورت سؤال را خواسته است و حل این دو قسمت به روش هندسی توصیه می‌شود. تمرین‌های صفحه ۹۳ نیز جهت تمرین بیشتر این مفهوم به صورت غیر تکراری از مفاهیم مختلف حل می‌شوند که حل تمامی آنها در کلاس درس لازم است.

حل تمرین‌های صفحه ۷۶

۶ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

حل: دو عدد فرد متوالی را $2k+1$ و $2k+3$ می‌گیریم. پس:

$$(2k+1)^2 + (2k+3)^2 = 290 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 + 4k^2 + 12k + 9 = 290 \Rightarrow 8k^2 + 16k - 280 = 0$$

و با ساده کردن به معادله $k^2 + 2k - 35 = 0$ می‌رسیم. اکنون این معادله را به روش تجزیه حل

می‌کنیم:

$$k^2 + 2k - 35 = 0 \Rightarrow (k+7)(k-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k+7=0 \Rightarrow k=-7 \\ k-5=0 \Rightarrow k=5 \end{cases}$$

اگر $k=5$ باشد، دو عدد فرد متوالی، عبارت‌اند از ۱۱ و ۱۳. همچنین اگر $k=-7$ باشد، این دو عدد

فرد متوالی، عبارت‌اند از -۱۱ و -۱۳.

۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

حل: مساحت این مستطیل، ۴۵ سانتی متر مربع است، پس:

$$a(4a + 3) = 45 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 45 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(4)(-45) = 9 + 720 = 729$$

a



پس معادله فوق دو ریشه دارد و این دو ریشه عبارت‌اند از:

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{8} = \frac{-3 \pm 27}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-3 + 27}{8} = \frac{24}{8} = 3 \\ a = \frac{-3 - 27}{8} = \frac{-30}{8} = \frac{-15}{4} \end{cases}$$

۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر چهار سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

حل: اگر سن این دو برادر را a و b نشان دهیم، سپس $a - b = 4$. از سوی دیگر، بعد از چهار سال رابطه $(a + 4)(b + 4) = 60$ برقرار است. بنابراین، با جایگذاری $a = b + 4$ در این رابطه داریم:

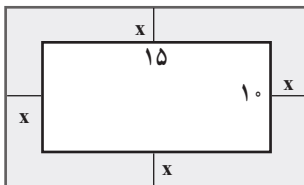
$$(a + 4)(b + 4) = 60 \Rightarrow (b + 4 + 4)(b + 4) = 60 \Rightarrow$$

$$(b + 8)(b + 4) = 60 \Rightarrow b^2 + 12b + 32 = 60$$

که با ساده کردن به معادله $b^2 + 12b - 28 = 0$ می‌رسیم. این معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$b^2 + 12b - 28 = 0 \Rightarrow (b + 14)(b - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b + 14 = 0 \Rightarrow b = -14 \\ b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

و با توجه به اینکه سن انسان منفی نمی‌تواند باشد، جواب $b = -14$ رد می‌شود و $b = 2$ سن برادر کوچک‌تر و سن برادر بزرگ‌تر، $a = 6$ است.



۹ یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰ سانتی متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

حل: مساحت مستطیل بزرگ (قاب عکس به همراه عکس) 45° سانتی متر مربع است، پس:
 $(15+2x)(10+2x) = 450 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 450 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 25x - 225 = 0$

و این معادله را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (25)^2 - 4(2)(-225) = 625 + 1800 = 2425$$

پس معادله دو ریشه حقیقی دارد و داریم:

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{2425}}{4} \cong \frac{-25 \pm 49/24}{4}$$

و با توجه به اینکه x یک عدد مثبت است، جواب زیر به دست می‌آید:

$$x \cong \frac{-25 + 49/24}{4} = 6/06$$

۱۰ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به دست آورید.



حل: اگر تعداد تیم‌ها، n باشد، تیم اول، با $n-1$ تیم بازی می‌کند. تیم دوم باید با $n-2$ تیم (همه تیم‌ها به جز تیم اول) بازی کرده و به همین ترتیب، تیم سوم با $n-3$ تیم و ... و تیم $n-1$ ام فقط با یک تیم بازی می‌کند، پس تعداد بازی‌های انجام شده عبارت است از:

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

و این عدد باید N باشد، پس $N = \frac{n(n-1)}{2}$.
 اگر ۴۵ بازی در لیگ انجام شده باشد، داریم:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow n(n-1) = 90 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0$$

پس $(n-10)(n+9) = 0$ که جواب‌های $n = 10$ و $n = -9$ به دست می‌آید که تنها $n = 10$ قابل قبول است.

۱۱ فشار خون نرمال یک شخص مذکر^۱، که برحسب میلی متر جیوه (mmHg) اندازه گیری می شود، با رابطه $P = 0.006s^2 - 0.02s + 120$ محاسبه می شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید).



حل: در رابطه $P = 0.006s^2 - 0.02s + 120$ قرار می دهیم $P = 125$ و معادله را حل می کنیم.
 $0.006s^2 - 0.02s + 120 = 125 \Rightarrow 0.006s^2 - 0.02s - 5 = 0$
 و این معادله را با روش کلی حل می کنیم و جواب های $x = 30/58$ و $x = -27/24$ را به دست می آوریم.
 که تنها جواب $x = 30/58$ قابل قبول است.

حل تمرین های صفحه ۸۱

۲ حل: دو نقطه $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ عرض یکسان دارند، پس نقطه میانی آنها، یعنی $(-1, 5)$ است.
 روی خط تقارن قرار دارد، پس معادله خط تقارن، $x = -1$ است.

۳ حل: محور y ها در نقطه ای به عرض ۲ قطع شده است، پس از نقطه $(0, 2)$ می گذرد، همچنین محور x ها را در نقاط $(-1, 0)$ و $(2, 0)$ قطع کرده است، پس این سه نقطه را در معادله سهمی قرار می دهیم.

$$\begin{cases} (0, 2) \Rightarrow 2 = a(\cancel{0}) + b(\cancel{0}) + c \Rightarrow \boxed{c = 2} \\ (-1, 0) \Rightarrow 0 = a(1) + b(-1) + c \Rightarrow a - b = -2 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = -4 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \oplus \\ (2, 0) \Rightarrow 0 = a(4) + b(2) + c \Rightarrow 4a + 2b = -2 \end{cases}$$

$$6a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -1}, \quad a - b = -2 \Rightarrow -1 - b = -2 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

پس معادله سهمی عبارت است از: $y = -x^2 + x + 2$

۱- منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.

۴ حل: دو سهمی $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ و $y = -2x^2 + 3x + 2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. همچنین برای یافتن نقطهٔ فرود و برخورد با زمین، قرار می‌دهیم $y = 0$ و معادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم و تنها جواب‌های مثبت را قبول می‌کنیم.

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$$

$$(رأس) x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{3}{2}}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{25}{8} \Rightarrow رأس = (\frac{3}{2}, \frac{25}{8})$$

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow -x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -1$$

x	0	$\frac{3}{2}$	3	4
y	2	$\frac{25}{8}$	2	0

$$y = -2x^2 + 3x + 2$$

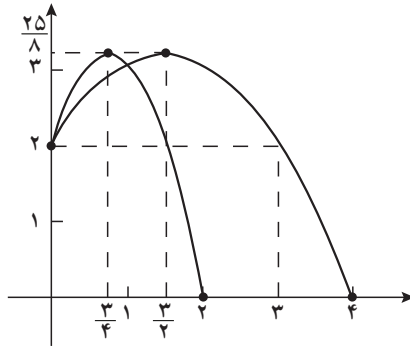
$$(رأس) x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(-2)} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{25}{8} \Rightarrow رأس = (\frac{3}{4}, \frac{25}{8})$$

$$y = 0 \Rightarrow -2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 = 16 = 25 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{-4} = 2$$

x	0	$\frac{3}{4}$	2
y	2	$\frac{25}{8}$	0

یا $-\frac{1}{2}$

و نمودار این دو سهمی در زیر رسم شده است.



حل تمرین‌های صفحه ۸۱

۲ حل : قرار دهید $x^2 + 3x + k > 0$. برای اینکه یک چندجمله‌ای درجه دوم همیشه مثبت باشد، باید $\Delta < 0$. پس $9 - 4k < 0$ ، بنابراین $k > \frac{9}{4}$.

۳ حل : قرار دهید $mx^2 - mx - 1 < 0$ ، پس $\Delta < 0$ و ضریب x^2 ، یعنی m نیز باید منفی باشد، پس :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0 \Rightarrow m(m+4) < 0 \Rightarrow \frac{m}{m^2 + 4m} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{ccc} -4 & & 0 \\ + & \phi & \circ & \phi & + \end{array} \\ m < 0 \end{array} \right.$$

پس مجموعه جواب، اشتراک جواب‌های $m < -4$ و $m < 0$ است که $m < -4$ است.

۴ حل : قرار دهید: $13 > 13 + 18t - 5t^2$ و این نامعادله را حل کنید.

۵ حل : قرار دهید $110 > \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ و این نامعادله را حل کنید. جواب‌های این

نامعادله عبارت‌اند از: $x < 4$ و $x > 12$ که تنها $x < 4$ قابل قبول است؛ زیرا پس از یک کار سنگین بدنی تا ۴ دقیقه ممکن است ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر باشد و نه بعد از دوازده دقیقه.

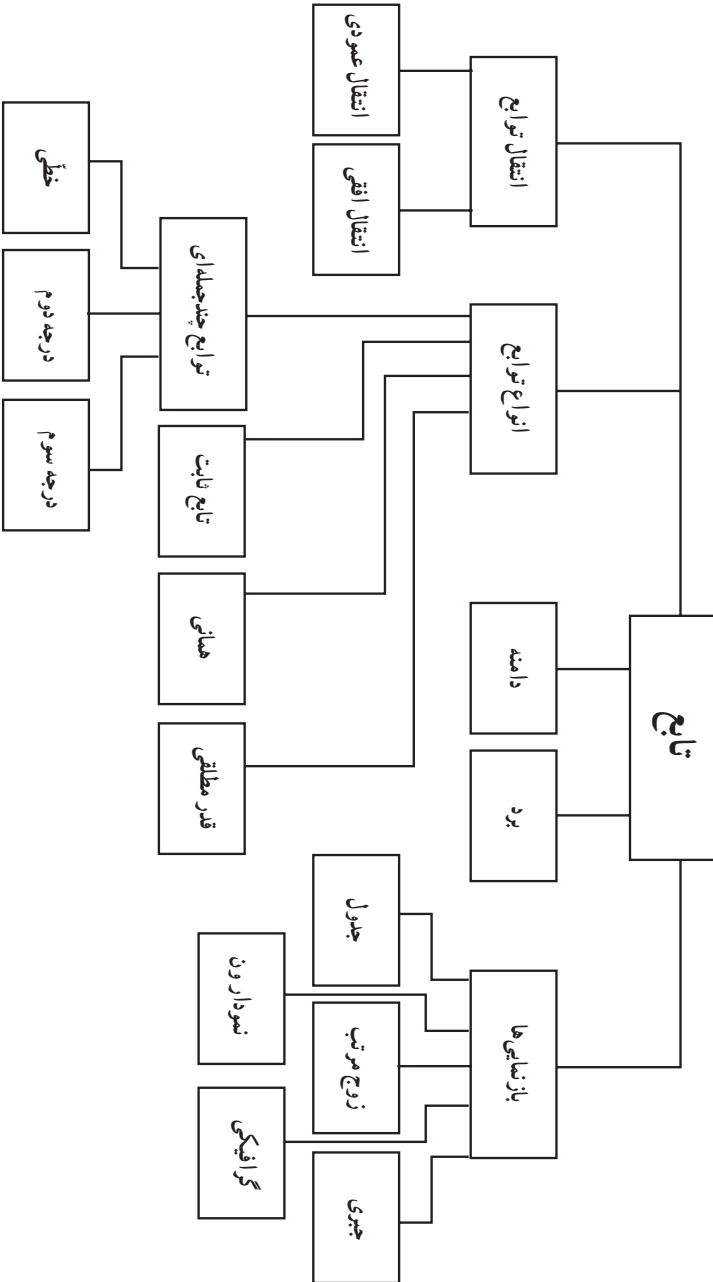
فصل ٥

تابع

نگاه کلی به فصل

فصل ۵ از سه درس تشکیل شده است. درس اول به مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن اختصاص دارد. درس دوم به دامنه و برد توابع می‌پردازد و در درس سوم انواع توابع مورد بررسی قرار می‌گیرند. معرفی ایده‌های مجرد بدون فراهم نمودن زمینه‌ای طبیعی و مناسب برای آنها و نیز بدون تکیه بر دانش و تجربه قبلی دانش‌آموزان بر دشواری‌های یادگیری می‌افزاید و گاهی دسترسی فراگیران را به این ایده‌ها ناممکن می‌سازد و علاوه بر این، باعث بروز پدیده‌ای به نام مقاومت در برابر یادگیری در دانش‌آموزان می‌شود. رویکرد منطقی تعریف تابع با زوج مرتب در مدرسه شروع مناسبی نمی‌باشد و بسیاری از دانش‌آموزان را به جای تفکر و مشاهده دقیق و کشف رمزها و نظام‌های نهفته در پدیده‌های پیرامونی، به حفظ کردن طوطی‌وار و اعمال مکانیکی وادار می‌کند. دانش‌آموزی نمی‌برد که تعاریف از کجا سرچشمه می‌گیرند و ارائه چنین تعریفی را شبیه شعبده‌بازی می‌پندارد. نمی‌توان از دانش‌آموزان انتظار داشت که مفهومی مجرد مانند تابع را به یکباره و پس از یک معرفی صریح و بدون فراهم کردن پیش‌نیازهای لازم درک کنند. در این فصل سعی شده است هنگام آموزش تابع موارد زیر مدنظر قرار گیرد:

- انجام فعالیت توسط دانش‌آموزان برای کسب مفهوم.
- فراهم کردن موقعیت‌های یادگیری متنوع.
- تکیه بر دانش قبلی دانش‌آموزان.
- حرکت از شهود به تجرید.
- ایجاد یک جریان استقرایی و فراهم کردن فرصت کشف.
- استفاده از سطح تجرید مناسب با دانش‌آموزان.
- توانایی نشان دادن ارتباطات بین مفاهیم ارائه شده.
- پرهیز از تکیه صرف بر دانش رویه‌ای.
- استفاده از مثال‌های واقعی مبتنی بر تجربیات عینی دانش‌آموزان.
- طرح مسائل مرتبط با بدفهمی‌های دانش‌آموزان.
- فراهم کردن فرصت‌های طرح مسئله برای دانش‌آموزان.
- توانایی برقراری ارتباط و سازگاری بین بازنمایی‌های متفاوت از تابع.



تصویر عنوانی

تصویر عنوانی فصل پنجم به ارائه نمودارهایی مبتنی بر اسناد رسمی در رابطه با کاهش نرخ رشد جمعیت و پیش‌بینی رشد جمعیت کل کشور در چهار وضعیت مختلف اختصاص دارد. تصویر عنوانی فوق، مثالی از برقراری ارتباط بین ریاضیات و دنیای واقعی است. در حقیقت نمودارها یکی از انواع بازنمایی‌های مربوط به تابع را نشان می‌دهند. اگرچه درک کامل و تفسیر این نمودارها پس از آموزش‌های لازم امکان‌پذیر است، با این حال، در اولین برخورد نیز نمودارها به کمک توضیحات معلمان تا حدی گویا هستند. همچنین تصویر عنوانی فوق سعی در فرهنگ‌سازی و طرح یکی از مسائل و مشکلات کشور را دارد. در رابطه با اهمیت فرهنگی موضوع بهترین کار آشنایی با دیدگاه‌ها و نظرات رهبر معظم انقلاب در این زمینه است^۱:

مسئله جمعیت که به جد هم مورد بحث و اختلاف نظر در جامعه است، مسئله بسیار مهمی است. بلاشک از نظر سیاست کلی کشور، کشور باید برود به سمت افزایش جمعیت، البته به نحو معقول و معتدل. همه اشکالات و ایرادهایی که وارد می‌شود - که بعضی از اشکالاتی را هم که مطرح می‌کنند ما دیده‌ایم - قابل برطرف شدن و قابل پاسخ دادن است.

فرهنگ‌سازی در مسئله جمعیت، مثل خیلی از مسائل دیگر اجتماعی، حرف اول را می‌زند؛ باید فرهنگ‌سازی بشود که متأسفانه امروز این فرهنگ‌سازی نیست.

من معتقدم که کشور ما با امکاناتی که داریم، می‌تواند صد و پنجاه میلیون نفر جمعیت داشته باشد. من معتقد به کثرت جمعیتیم. هر اقدام و تدبیری که می‌خواهد برای متوقف کردن رشد جمعیت انجام بگیرد، بعد از صد و پنجاه میلیون انجام بگیرد!

آنچه که متخصصین و کارشناسان، با نگاه‌های علمی، با دقت علمی بررسی کرده‌اند، ما را به این نتیجه می‌رساند که با این روند کنونی، کشور در آینده دچار مشکل فراوان خواهد شد؛ کشور دچار پیری عمومی خواهد شد. این تهدید نسل، چیز بدی است. البته شنیدیم در مجلس طرحی در حال بررسی است؛ منتها آن‌طور که برای ما نقل کردند، آن طرح جواب نمی‌دهد؛ این مقداری که در این طرح دیده شده، جوابگو نیست. مسئولین و علاقه‌مندان و آشنایان با مقتضیات این کار در مجلس، باید توجه کنند و درست انجام دهند.

۱- این دیدگاه‌ها برگرفته از منبع حاضر است:

دانستنی‌هایی برای معلم

مفهوم تابع به درستی به عنوان یکی از مهم‌ترین مفاهیم در سراسر ریاضیات در نظر گرفته می‌شود. توابع در سرتاسر برنامه‌درسی ریاضیات مدرسه نیز حضور دارند و به تعبیر NCTM یک ایده‌متحدکننده مهم در ریاضیات اند. در حساب، توابع به عنوان اعمال روی اعداد ظاهر می‌شوند؛ مثلاً عمل جمع که یک زوج از اعداد را به مجموع آنها نسبت می‌دهد، در جبر، توابع رابطه‌هایی بین متغیرهایی اند که اعداد را نمایش می‌دهند. در هندسه، توابع مجموعه‌های نقاط را به تصاویرشان تحت حرکتی از قبیل انتقال و دوران نسبت می‌دهند و در احتمال توابع، حوادث را به احتمال وقوع آنها نسبت می‌دهند (NCTM ۱۹۸۹). کلاین (۱۹۴۵-۱۹۰۸) عقیده داشت که تابع باید یک مفهوم پایه در ریاضیات مدرسه باشد.

مفهوم تابع و مثال‌هایی خاص از آن را از هزاران سال قبل می‌توان دنبال کرد. به‌طور مثال، شمردن، چهار عمل اصلی (که توابعی از دو متغیرند)، ریشه‌های دوم، مکعب‌ها و ریشه‌های سوم و موارد زیادی از این دست، همگی دربردارنده مفهوم تابع اند. اگرچه سیر تکامل تابع به ۴۰۰۰ سال قبل برمی‌گردد. اما ریاضی‌دان‌ها تنها طی ۵۰۰ سال گذشته تلاش‌های خود را برای ارائه یک تعریف دقیق از تابع آغاز کرده‌اند. هم‌زمان با تغییر دیدگاه‌های ریاضی‌دانان از ایده‌های هندسی به ایده‌های جبری نماد تابع نیز دستخوش دگرگونی شد.

در سال ۱۷۱۸ برنولی اولین تعریف رسمی از تابع را ارائه کرد. برنولی یک تابع از یک متغیر را یک کمیت ترکیب شده به هر شیوه دلخواه از این متغیر و تعدادی ثابت می‌داند. اگرچه وی توضیح نمی‌دهد «به هر شیوه دلخواه» به چه معنی است. اوایل در سال ۱۷۴۸ تعریف زیر را ارائه کرد. یک تابع از یک کمیت متغیر، عبارتی تحلیلی ترکیب شده به شکل دلخواه از آن کمیت متغیر و اعداد یا کمیت‌های ثابت است. اوایل اولین کسی است که نماد $f(x)$ را به کار برد. تعریف اوایل تلاشی برای استفاده از جبر در جهت نمایش موضوعات هندسی بود. مشاهدات اوایل به یک دیدگاه وسیع‌تر از تابع منجر شد.

تعریف اوایل شبیه تعریف برنولی است. اضافه شدن اصطلاح «عبارت تحلیلی» با اهمیت است؛ زیرا اندیشه را از هندسه به جبر تغییر می‌دهد، گرچه اوایل به صراحت عبارت تحلیلی را تعریف نمی‌کند، ولی از نظر وی، عبارت تحلیلی قابل قبول شامل چهار عمل جبری، ریشه‌ها، نماها، لگاریتم‌ها، توابع مثلثاتی، مشتق‌ها و انتگرال‌هاست.

به هر حال، روشن است که اوایل عبارت زیر را به‌عنوان دو تابع و نه یک تابع در نظر می‌گرفته است.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

در سال ۱۸۲۹ دیریکله مثالی از یک تابع ارائه کرد که در آن، یک مقدار به همه اعداد گویا و مقداری دیگر به همه اعداد گنگ نسبت داده می‌شد. این اولین مثال صریح از یک تابع بود که نه قابل نمایش به وسیله یک عبارت تحلیلی بود و نه یک منحنی قابل رسم بدون ابزار بود. این اولین مثال از یک تابع همه‌جا ناپیوسته بود. ریاضی‌دان‌ها مقارن با پایان قرن نوزدهم، برای صورت‌بندی همه ریاضیات با استفاده از نظریه مجموعه‌ها تلاش‌ی به کار بردند. دیریکله (۱۸۵۹ - ۱۸۰۵) در سال ۱۸۳۷ چارچوب تعریف یک تابع را برحسب یک تناظر قراردادی بین متغیرهایی که با مجموعه‌های عددی نمایش داده شده‌اند، پی‌ریزی کرد. کلینر (۱۹۸۹) به نقل از لوزین، تعریف دیریکله را چنین ذکر می‌کند: y تابعی از متغیر x تعریف شده روی بازه $a < x < b$ است، هرگاه به هر مقدار متغیر x از این بازه یک مقدار معین از متغیر y نظیر شود. دیریکله اولین کسی بود که به‌صورت جدی مفهوم تابع را به‌عنوان یک تناظر دلخواه در نظر گرفت.

در سال ۱۹۳۹ یک گروه از ریاضی‌دانان با نام مستعار بورباکی تابع را به شیوه زیر تعریف کردند: فرض کنید که E و F دو مجموعه باشند که ممکن است مجزا یا غیرمجزا باشند. یک رابطه بین یک متغیر x از E و یک متغیر y از F یک رابطه تابع گونه در y نامیده می‌شود. هرگاه برای هر x در E ، یک y یکتا در F وجود داشته باشد که در رابطه داده شده با x باشد. بورباکی بعداً همچنین تعریف تابع را به‌عنوان یک زیرمجموعه خاص از حاصل‌ضرب دکارتی E و F داد. تعریف بورباکی اولین تعریف تابع به‌عنوان یک مجموعه از زوج‌های مرتب است. این دوره را می‌توان حضور یک دیدگاه جدید، یعنی مفهوم منطقی (مجزّد، ترکیبی، اصل موضوعی) جدید از تابع در برابر مفهوم جبری (محسوس، تحلیلی و ساختنی) قبلی از تابع تلقی کرد (کلینر ۱۹۸۹). در حقیقت مفهوم تابع یکی از خصیصه‌های متمایزکننده ریاضیات «مدرن» در برابر ریاضیات کلاسیک است (کلینر ۱۹۸۹).

مفهوم تابع

اهداف

- آشنایی با مفهوم تابع
- درک بازنمایی‌های مختلف تابع
- ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف تابع و تبدیل آنها به یکدیگر

روش تدریس

در آموزش مفهوم تابع دو موضوع پایه‌ای و اساسی به حساب می‌آیند و برخی موضوعات دیگر می‌توانند قراردادی باشند. اولین موضوع اساسی نحوه تناظر و ارتباط بین مجموعه‌هایی است که تابع به کمک آنها تعریف می‌شود. به عبارت دیگر «یکتایی» تناظر یک شرط اساسی برای تابع بودن رابطه‌هاست و در فعالیت‌های طراحی شده در ابتدای درس به این موضوع پرداخته شده است. نکته مهم دیگر این است که اعضای مجموعه‌ها «آزاد» و «دلخواه» هستند و لزوماً به اعداد محدود نمی‌شوند. در ادامه دانش‌آموزان با مقایسه روابطی که تابع نیستند به تمایز و تفاوت‌های آنها پی می‌برند. باید توجه داشت که معلمان محترم نقش هدایت‌کننده و راهنما را دارند و باید با استفاده از موقعیت‌هایی که در درس فراهم شده‌اند (یا مشابه آنها) فرصت‌های یادگیری را برای دانش‌آموزان فراهم نمایند. ارائه بحث و گفت‌وگوهای کلاسی بسیار مفید و ارزشمند خواهد بود. به‌طور طبیعی در حین اجرای فعالیت‌ها پاسخ‌های متفاوتی از سوی دانش‌آموزان (درست یا نادرست) ارائه می‌شود.

بررسی این پاسخ‌ها و قضاوت در مورد آنها به کمک دانش‌آموزان و اصلاح و پالایش ایده‌های مطرح شده به درک بهتر مفهوم توسط دانش‌آموزان کمک می‌نماید. در این درس، دانش‌آموزان با بازنمایی‌های مختلف تابع شامل «نمودار ون»، «زوج مرتبی»، «جدول»، و نمایش «هندسی» یا «گرافیکی» تابع آشنا می‌شوند. باید

به دانش‌آموزان کمک کرد تا برای توابع مشخص و معین انواع بازنمایی‌های آن را ارائه نمایند و با مقایسه آنها به جوهر «مفهوم تابع» بی‌برند. در این درس، فرصت‌هایی فراهم شده است تا دانش‌آموزان خود به ارائه مثال از تابع بیرازند، اصلاح و ویرایش تکمیل مثال‌ها با مشارکت دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.

توصیه‌های آموزشی

اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، در کتاب حاضر دامنه تابع f برابر مجموعه A در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که می‌دانید این یک موضوع قراردادی است که در حال حاضر در بیشتر کتاب‌های آموزشی در سطح دنیا رعایت می‌شود و البته در برخی متون زیر مجموعه‌ای از A را به عنوان دامنه در نظر می‌گیرند. توصیه می‌شود که دانش‌آموزان را درگیر مسائل حاشیه‌ای نکنیم و از طرح مسائل غیر ضروری در این ارتباط پرهیز نماییم؛ همچنین توصیه می‌شود که به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل دشوار و پیچیده که فاقد ارزش آموزشی اند اجتناب شود. درک مفهوم تابع کار آسانی نیست و قبل از اینکه این مفهوم درک شود مواجه کردن دانش‌آموزان با مسائلی تکنیکی دشوار و بی‌فایده یک اشتباه به حساب می‌آید.

اشتباهات رایج

ممکن است برخی از دانش‌آموزان برای درک مفهوم «زوج مرتب» با دشواری مواجه باشند و تفاوتی برای ترتیب مؤلفه‌ها قائل نباشند. همچنین ممکن است یکتایی مطرح شده در تعریف تابع با مفهوم «یک به یک بودن» جابه‌جا در نظر گرفته شود.

دامنه برد تابع

درس دوم

اهداف

- آشنایی با مفهوم دامنه و برد
- معرفی توابع خطی
- ارائه نمایش جبری توابع

روش تدریس

در اولین فعالیت این درس در صفحه ۱۰۱ دانش‌آموزان با مفهوم دامنه و برد آشنا می‌شوند. انجام فعالیت توسط دانش‌آموزان و بررسی پاسخ‌ها و در صورت لزوم ارائه نمونه‌های بیشتر به درک مفهوم دامنه و برد کمک می‌نماید. در فعالیت دوم، مفهوم برد بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند و دانش‌آموزان بی‌می‌برند که اگر f تابعی از A به B باشد، برد تابع f لزوماً مجموعه B نخواهد بود. در فعالیت صفحه ۱۰۲ به کمک دنباله‌ها نمایش جبری یک تابع ارائه می‌شود. همچنین مفهوم دامنه و برد به‌طور عمیق‌تری مورد بررسی قرار می‌گیرد و مشخص می‌شود که توابعی با دامنه‌ها و بردهای متفاوت می‌توانند نمایش جبری یکسانی داشته باشند. علاوه بر این، به کمک فعالیت صفحه ۱۰۳ توابع خطی معرفی می‌شوند. برای این کار از مفهوم آشنایی خط و معادله آن استفاده شده است. ضمن اینکه ارتباط مناسبی با دنباله‌ها نیز برقرار شده است. نمودارهای صفحه ۱۰۳ در راستای برقراری ارتباط بین ریاضیات و دنیای واقعی با تأکید بر مفهوم تابع ارائه شده‌اند. در کار در کلاس صفحه ۱۰۴ برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، معیاری داده شده است. در صورت لزوم می‌توان مثال بیشتری ارائه کرد تا دانش‌آموزان با مقایسه آنها بتوانند معیار را ارائه نمایند.

توصیه‌های آموزشی

مفهوم دامنه و برد از جمله مفاهیم اساسی در بحث تابع اند. یک تصور عام در این باره آن است که درک مفهوم صرفاً با محاسبهٔ دامنه و برد توابع پیچیده حاصل می‌شود. تجربه نشان داده است که قبل از درک این مفهوم توسط دانش‌آموزان، به آنها تمرینات مشکل و ترکیبی ارائه می‌شوند که مستلزم دانش و مهارت‌های مختلفی برای محاسبه دامنه و برد هستند. توصیه می‌شود که سطح مسائل در حد مسائل مطرح شده در کتاب درسی باشد.

اشتباهات رایج

از جمله اشتباهات رایج دانش‌آموزان در مورد دامنه و برد این است که اگر دو تابع دامنه‌ها و بردهای یکسانی داشته باشند، الزاماً با هم برابرند. در تمرین ۱۶ صفحه ۱۰۸ به این موضوع پرداخته شده است. همچنین ممکن است برخی دانش‌آموزان تصور کنند که اگر ضابطهٔ جبری یک تابع معلوم باشد، نمایش هندسی آن یا دیگر بازنمایی‌های آن منحصر به فرد است. در تمرین ۳ صفحه ۱۰۶ دانش‌آموزان پی می‌برند که تابع‌های متفاوتی (با دامنه‌ها و بردهای متفاوت) می‌توانند نمایش جبری یکسانی داشته باشند.

انواع توابع

درس سوم

اهداف

- آشنایی با توابع چند جمله‌ای
- معرفی توابع قدر مطلق
- رسم توابع به کمک انتقال

روش تدریس

در فعالیت صفحه ۱۰۹ دانش‌آموزان به کمک مفاهیم مساحت و حجم که با آنها آشنا هستند و با استفاده از نمایش جبری توابع، با توابع چند جمله‌ای آشنا می‌شوند. در صورت لزوم، مثال‌های بیشتری توسط معلمان محترم باید ارائه شود. همچنین تابع «همانی»، و تابع «ثابت» با بازنمایی‌های مختلف معرفی می‌شوند. کار در کلاس صفحه ۱۱۰ کمک می‌کند تا درک دانش‌آموزان از توابع فوق کامل‌تر شود. همان‌گونه که در کتاب تأکید شده است. تفاوت‌ها و شباهت‌های توابع داده شده در هر مورد باید استفاده شود تا ایده‌آسی نهفته در هر تابع (همانی و ثابت) درک شود. در کار در کلاس نیز مثال‌هایی توسط دانش‌آموزان ارائه می‌شود و معلمان محترم باید شرایطی را برای ارائه و بررسی و مقایسه مثال‌ها فراهم نمایند. در مورد کار در کلاس صفحه ۱۱۰ باید فرصت کافی به دانش‌آموزان داده شود تا نمودارها رسم شوند.

البته در فصل‌های قبل دانش‌آموزان با رسم نمودار $y=x^2$ آشنا شده‌اند و هدف کار در کلاس صفحه ۱۱۰ علاوه بر رسم نمودار، تأکید بر دامنه و بردهای متفاوت است. فعالیت صفحه ۱۱۱ به معرفی تابع قدر مطلق می‌پردازد. قدر مطلق یک عدد در سال‌های گذشته برای دانش‌آموزان معرفی شده است و با استفاده از این موضوع، تابع قدر مطلق ارائه شده است. باز هم توجه به دامنه و برد مورد تأکید است. توابع قطعه‌ای

(چند ضابطه‌ای) در صفحه ۱۱۲ ارائه شده‌اند. در فعالیت صفحه ۱۱۲ قسمتی از نمودار توابع قطعه‌ای ارائه شده است. دانش‌آموزان در این فعالیت درگیر حدس زدن، رسم کردن، استدلال، یافتن ارتباطات و مانند آن می‌شوند. به هر حال برای ادعای مطرح شده دانش‌آموزان باید از آنها دلیل خواست و بهتر است در هر مورد نیز سؤالاتی توسط معلم مطرح شود. در کار در کلاس شماره ۲ صفحه ۱۱۳، برای یافتن ضابطه تابع قطعه‌ای داده شده لازم است که معادلات خطوط نشان داده شده به دست آید.

فعالیت صفحه ۱۱۳ به رسم نمودار توابع به کمک انتقال عمودی اختصاص دارد. علاوه بر آنچه که در کتاب مطرح شده است می‌توان از دانش‌آموزان خواست که در مورد شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارهای داده شده توضیح دهند. همچنین علاوه بر نمودارهای توابع داده شده، در صورت لزوم توابع دیگری که به کمک انتقال عمودی توابع اولیه به دست می‌آیند، قابل طرح‌اند. به روش مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱۴ به انتقال افقی می‌پردازد. در صورت امکان اگر نمودارها به کمک نرم‌افزارها از قبل تهیه و در کلاس نمایش داده شوند، امکان مقایسه هم‌زمان تعداد بیشتری از توابع و انتقال یافته آنها برای دانش‌آموزان فراهم می‌شود. کار در کلاس صفحه ۱۱۵ نمونه مناسبی برای ارزشیابی به حساب می‌آید و لازم است دانش‌آموزان دلایل خود برای انتخاب هر نمودار را ارائه نمایند.

توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود که سطح مسائل در یک کلاس معمولی از آنچه که در تمرین‌های کتاب مطرح شده است فراتر نرود. همچنین بازتاب بر حل مسائل و تجزیه و تحلیل آنها بسیار مفیدتر از ارائه تعداد زیادی مسئله اضافی و غیرضروری است.

اشتباهات رایج

برخی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان در این درس، جابه‌جایی انتقال عمودی و افقی با یکدیگر است. همچنین برخی تصور می‌کنند که هر تابع باید یک نمایش جبری داشته باشد و یا اینکه هر عبارت، یا معادله لزوماً یک تابع را مشخص می‌کند.

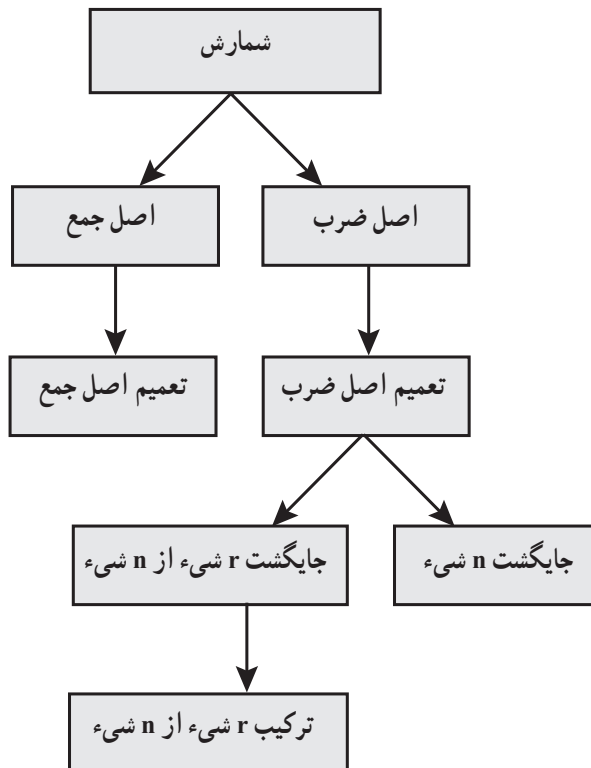
فصل ۶

شمارش، بدون شمردن

نگاه کلی به فصل

ترکیبات یکی از شاخه‌های مهم و جذاب ریاضیات است و شمارش یکی از اصلی‌ترین موضوعات آن می‌باشد. شمارش به صورت یک به یک فرایندی است که دانش‌آموز در ابتدای آشنایی با ریاضیات با آن مواجه می‌شود، ولی با آشنایی فرد با مسائل پیچیده‌تر به نظر می‌رسد که شمارش یک به یک در بسیاری موارد کافی نیست و نیاز به تکنیک‌ها و مهارت‌های بیشتری از شمارش وجود دارد. فصل ۶ کتاب ریاضی پایه دهم به این مبحث اختصاص یافته است. این فصل، شامل سه درس است. در درس اول اصول جمع و ضرب مطرح می‌شوند که از مهم‌ترین پایه‌ها برای به دست آوردن تکنیک‌های شمارش می‌باشند. در واقع با درک این دو اصل و بدون دانستن مفاهیم پیشرفته‌ای از ریاضیات، بسیاری سؤال‌های نه چندان ساده شمارش قابل حل‌اند. در درس دوم با استفاده از مفهوم اصل ضرب، مفهوم جایگشت n شیء و جایگشت r شیء بیان و تشریح می‌گردد و در درس سوم مفهوم ترکیب و مسائل مربوط به آن مطرح می‌شود.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

مسئله معروف «چهار رنگ» می‌گوید؛ هر نقشه را می‌توان با چهار رنگ به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیه هم مرزی دارای رنگ یکسان نباشند که مسئله معادل آن در گراف‌ها به این صورت است که؛ هر گراف مسطح، چهار رنگ‌پذیر است. (برای کسب اطلاعات بیشتر به کتاب نظریه گراف باندی - مورتی مراجعه شود). مطرح کردن چنین سؤالی با دانش‌آموزان صرفاً جهت وادار کردن دانش‌آموزان به تفکر و تأمل در اینکه مسائل مربوط به شمارش صرفاً با روش‌های ابتدایی که از قبل می‌شناسد حل نمی‌شوند.

توصیه‌های آموزشی

در مباحث و مسائل ترکیباتی باید توجه شود که سطح دشواری سؤال‌ها می‌تواند با کوچک‌ترین تغییر در سؤال بسیار تغییر کند، تا آنجا که بدون نیاز به دانستن مفاهیم پیشرفته در این موضوع، و فقط با دانستن چند رابطه ساده اولیه در ترکیبات، برای برخی مسائل پیچیده ترکیباتی که بعضاً در آزمون‌های المپیاد نیز مطرح شده‌اند، می‌توان حل ارائه نمود. لذا بهتر است معلم همواره سطح سختی سؤال‌ها را کنترل نماید و مسائلی طرح کند که دانش‌آموزان برای حل آن با چالشی مواجه شوند که با توجه به مفاهیم آموزش داده شده و با کمی تفکر قابل حل باشند و حل آنها برای دانش‌آموزان غیر قابل دسترس نباشد.

شمارش

درس اول

اهداف

- آشنایی با برخی روش‌های شمارش بدون شمردن مستقیم
- آشنایی با اصل جمع و تعمیم آن
- آشنایی با اصل ضرب و تعمیم آن
- تشخیص مسائلی که با اصل جمع یا اصل ضرب حل می‌شوند.
- به‌کارگیری اصل جمع در حل مسائل
- به‌کارگیری اصل ضرب در حل مسائل
- طرح مسائلی که با اصل جمع یا اصل ضرب حل می‌شوند.

روش تدریس

یکی از مواردی که برای شروع درس بسیار حائز اهمیت می‌باشد، ایجاد انگیزه برای یادگیری و بازگو کردن اهمیت موضوع درس در به‌کارگیری آن در مسائل مختلف است. این کار را می‌توان با گفت‌وگوی اولیه و مطرح کردن پرسش‌هایی نظیر آنچه در مورد پلاک ماشین‌ها در ابتدای درس آمده است انجام داد. در ارائه درس که از طریق انجام و پیگیری فعالیت صورت می‌پذیرد، باید توجه داشته باشیم یکی از مواردی که بسیار حائز اهمیت است دقت و توجه به درک مفهوم‌های اصل جمع و اصل ضرب در دانش‌آموزان می‌باشد و برای این کار پس از ارائه فعالیت و بازگو کردن مثال، به تعداد لازم، درخواست طرح سؤال‌هایی که با اصل جمع یا با اصل ضرب حل شوند محک بسیار خوبی است که می‌توان با آن درک دانش‌آموزان را نسبت به موضوع درس بسنجیم.

حل تمرین‌های برگزیده صفحه ۱۲۴

۱- الف) چون گزینه موردنظر یا یک عدد، یا یک حرف است، لذا با استفاده از اصل جمع خواهیم داشت: $۱۰+۳۲=۴۲$

ب) چون در رمز موردنظر هم یک حرف و هم یک عدد وجود دارد، لذا با توجه به اصل ضرب داریم: $۱۰ \times ۳۲ = ۳۲۰$

پ) در این حالت اگر گزینه اول عدد باشد، با توجه به آنچه در قسمت (ب) گفته شد ۳۲۰ حالت امکان دارد و در صورتی که حرف دوم عدد باشد نیز همین تعداد حالت وجود دارد، لذا در کل ۶۴۰ حالت وجود دارد.

ت) اگر هر دو گزینه عدد باشند، تعداد $۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰$ حالت و اگر هر دو حرف انگلیسی باشند، تعداد $۲۶ \times ۲۶ = ۶۷۶$ حالت وجود دارد؛ لذا در کل ۷۷۶ حالت وجود دارد. (اصل ضرب و اصل جمع)

ث) برای دو گزینه اول با توجه به اصل ضرب $۱۰ \times ۹ = ۹۰$ حالت و برای دو گزینه دوم نیز با توجه به اصل ضرب تعداد $۲۶ \times ۲۵ = ۶۵۰$ حالت امکان دارد؛ لذا با توجه به اصل ضرب در کل تعداد $۹۰ \times ۶۵۰ = ۵۸۵۰۰$ حالت امکان دارد.

۳- الف) $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

ب) اگر اولین رأس را آبی (قرمز) کنیم، رأس دوم باید قرمز (آبی) شود و لذا برای رأس سوم هیچ رنگی باقی نمی‌ماند لذا این کار امکان پذیر نیست.

پ)

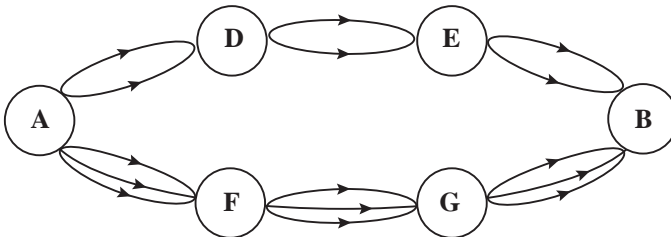
الف) $۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$

ب) برای رأس اول سه حالت، برای رأس دوم دو حالت و برای رأس سوم یک حالت امکان دارد؛ لذا در کل $۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$ حالت ممکن است.

۴- با توجه به اصل ضرب تعداد $۹ \times ۹ \times ۱۳ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۱۳ \times ۹^۶$ حالت امکان پذیر است.

۸- چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت به طوری که از عدد ۶۰ بزرگ‌تر یا مساوی آن باشند.

۹- با توجه به شکل زیر به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟



جایگشت

درس دوم

اهداف

- به کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم جایگشت
- به کارگیری مفهوم جایگشت در حل مسائل
- آشنایی با نماد فاکتوریل
- تسلط بر محاسباتی که شامل فاکتوریل است.
- به کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم جایگشت r شیء از n شیء
- آشنایی با مفهوم جایگشت r شیء از n شیء و فرمول مربوط به آن
- تشخیص مسائلی که با به کارگیری جایگشت r شیء از n شیء حل می شوند.
- به کارگیری مفهوم جایگشت r شیء از n شیء در حل مسائل

روش تدریس

مطالب قبل از فعالیت برای جلب توجه دانش‌آموزان و ایجاد پیش‌زمینه‌ای در ارتباط با موضوع چینش‌های متفاوت اشیا متمایز است. با پیگیری فعالیت‌ها می‌توان مفهوم جایگشت را در ذهن دانش‌آموزان جای داد و درک آنها را از این مفهوم بالا برد. می‌توان با جلب توجه دانش‌آموزان به این مطلب که در بحث جایگشت در واقع موضوع انواع مختلف چینش اشیا متمایز مطرح است، عدم تکراری بودن اشیا در جایگشت را توضیح داد. در معرفی نماد فاکتوریل و تلاش برای تسلط نسبی دانش‌آموزان به استفاده از این نماد بهتر است موارد مطرح شده در کار در کلاس به ترتیب بیان شوند تا از مقایسه منطقی آنها دانش‌آموز نتیجه‌گیری‌های منطقی لازم را بنماید.

در معرفی مفهوم جایگشت n شیء متمایز و جایگشت r شیء از n شیء متمایز، همان‌گونه که در فعالیت‌های کتاب دیده می‌شود، سعی شده است این مفاهیم براساس اصل ضرب و با استدلال در ذهن دانش‌آموزان جای بگیرد. بدیهی است که بیان روابط آنها بدون استدلال و به صورت رویه‌ای، سطح مطلوبی از یادگیری را در دانش‌آموزان ایجاد نخواهد کرد، هرچند احتمالاً به دستیابی دانش‌آموزان به جواب برخی

سؤالات منجر شود. از طرفی پس از معرفی و بیان مفاهیم مذکور، از آنجا که داشتن راهکارهایی جهت حلّ مسائل الزامی است، سعی در آموزش راهکارهای مطرح شده در مثال‌ها و کار در کلاس‌های درس، می‌تواند بسیار مفید باشد.

حلّ برخی از تمرین‌ها

۲ فرض کنیم تعداد کتاب‌های مورد نظر n تا باشد. بنابراین، تعداد حالت‌های چیدن کتاب‌های مورد نظر برابر است با $p(n, 3)$ ؛ لذا داریم:

$$p(n, 3) = 210 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 210 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 210$$

لذا حاصل ضرب سه عدد متوالی برابر 210 است.

با تجزیه عدد 210 خواهیم داشت: $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 5 \times 6 \times 7$

بنابراین $n=7$

۴ بدترین حالت یعنی انتخاب مورد نظر آخرین انتخاب در بین تمام انتخاب‌های ممکن باشد. اما تعداد تمام انتخاب‌های ممکن برابر است با $p(20, 3) = \frac{20!}{17!}$ ؛ لذا این تعداد مرتبه باید سه دکمه‌ها فشرده شوند. چون هربار فشردن سه دکمه، ۲ ثانیه وقت می‌گیرد؛ لذا این عدد باید در ۲ ضرب شود (با فرض اینکه زمان تلف شده‌ای نباشد).

۵ الف) ۶! و تعداد ۴! از آنها با «گل» شروع می‌شود.

ب) $p(6, 4)$

پ) دو حرف «پ» و «ر» به دو حالت «پر» و «رپ» می‌توانند کنار هم بیایند. فرض کنیم به حالت «پر» آمده باشند. در این صورت سه حالت زیر امکان دارد:

پر ، ... ، ...

... ، پر ، ...

... ، ... ، پر

که در هر کدام از حالت‌ها با 4×3 روش می‌توان جاهای خالی را پر کرد؛ لذا جواب برابر است با:

$$2 \times 3 \times 4 \times 3$$

ت) حروف کلمه «پیرا» چهار تا هستند؛ لذا یک حرف باید اضافه شود که به دو طریق این کار می‌تواند انجام شود. از طرفی خود حروف کلمه «پیرا» به ۴! حالت می‌توانند کنار هم بیایند و حرف اضافه شده هم به دو طریق می‌تواند به آنها اضافه شود (اول یا آخر بیاید) لذا جواب برابر است با: $2 \times 2 \times 4!$

ترکیب

اهداف

- به کارگیری اصل ضرب و جایگشت r شیء از n شیء برای رسیدن به مفهوم ترکیبی r شیء از n شیء
- تشخیص مسائلی که با استفاده از مفهوم ترکیب حل می‌شوند.
- به کارگیری مفهوم ترکیب در حل مسائل

روش تدریس

با توجه به اینکه جایگشت r شیء از n شیء به دانش‌آموزان گفته شده است، شروع درس با چند پرسش ساده که نشان‌دهنده تفاوت میان مفهوم جایگشت r شیء از n شیء و مفهوم ترکیب می‌تواند بسیار مفید باشد. در فعالیت مطرح شده در ابتدای درس هم سعی شده است با تمرکز روی تفاوت این دو مفهوم به درک بهتر آنها کمک شود. برای یادگیری بهتر رابطه‌ها نیز بهتر است با روشی که در فعالیت آورده شده است، یا مشابه آن، نحوه به دست آمدن فرمول را براساس استدلال برای دانش‌آموزان روشن ساخت. بیگیری مثال‌ها و کار در کلاس آورده شده برای جا افتادن هر چه بیشتر مفهوم و تسلط دانش‌آموزان بسیار مفید خواهد بود. فعالیت بعد به توضیح نوعی بدفهمی می‌پردازد. دانش‌آموزان را باید به اهمیت دقت در انتخاب روش شمارش واقف ساخت و توجه آنها را به این نکته معطوف کرد که در شمارش حالت‌ها باید دقت کنند که هر حالت یک، و دقیقاً یک بار شمرده شود. در فعالیت آخر این درس سعی شده برخی از رابطه‌هایی که در ترکیب برقرار است را با استدلال و شمارش چندگانه به دانش‌آموزان آموزش داد.

حل تمرین درس ۳

$$1 \quad \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}$$

۲ فرض کنیم تعداد داوطلبان مورد نظر n تا باشد، لذا تعداد انتخاب‌ها برابر $\binom{n}{2}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 \Rightarrow n = 8$$

۵

از آنجا که در کارهای هنری نسبت رنگ‌های ترکیبی می‌تواند خیلی متفاوت انتخاب شود، لذا تعداد رنگ‌هایی که می‌توان ساخت بسیار زیاد است.

$$4 + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

۷ الف) $\binom{1}{3}$

ب) فرض کنیم دو نوع ادویه‌ای که با هم نمی‌توانند استفاده شوند A و B باشند. روش اول:

$$\left. \begin{aligned} \binom{1}{2} &= \text{تعداد ادویه‌هایی که } A \text{ را دارند و } B \text{ را ندارند} \\ \binom{1}{2} &= \text{تعداد ادویه‌هایی که } B \text{ را دارند و } A \text{ را ندارند} \\ \binom{1}{3} &= \text{تعداد ادویه‌هایی که نه } A \text{ را دارند و نه } B \text{ را} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جواب} = \binom{1}{2} + \binom{1}{2} + \binom{1}{3} = 112$$

روش دوم:

$$\binom{1}{1} = 8 \Rightarrow \text{جواب} = \binom{1}{3} - 8 = 112$$

پ) یک حالت هست که هر سه ادویه مورد نظر با هم استفاده شده باشند، پس:

$$\binom{1}{3} - 1 = 119 = \text{جواب}$$

ت)

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

۸ پنج کتاب ریاضی مختلف و شش کتاب فیزیک مختلف داریم.

الف) به چند طریق می‌توان از بین آنها پنج کتاب انتخاب کرد به طوری که سه تایی آنها ریاضی و دو تایی آنها فیزیک باشند.

ب) به چند طریق می‌توان بسته‌ای از این کتاب‌ها برای هدیه دادن انتخاب کرد به طوری که بسته موردنظر دقیقاً سه کتاب ریاضی باشد، یا دقیقاً دو کتاب فیزیک.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ در منوی یک رستوران برای وعده ناهار هفت نوع مختلف غذای اصلی، چهار نوع مختلف پیش‌غذا و پنج نوع مختلف نوشیدنی وجود دارد. اگر فردی بخواهد یک وعده ناهار کامل همراه با پیش‌غذا و نوشیدنی سفارش دهد، به چند طریق ممکن می‌توان این کار را انجام داد؟

۲ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶

الف) چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد چهار رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد چهار رقمی کمتر از ۴۰۰۰ با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ث) چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵ با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ج) چند عدد چهار رقمی بیشتر از ۴۰۰۰ با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۳ با رنگ سبز، قرمز و آبی به چند حالت ممکن می‌توان خانه‌های جدول زیر را رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو خانه یک رنگ کنار هم قرار نگیرند.

--	--	--	--	--	--

۴ به چند حالت ممکن می‌توان از ده تیم شرکت‌کننده در یک تورنمنت، تیم‌های اول تا پنجم را مشخص کرد؟

۵ به چند طریق می‌توان شش کتاب ریاضی مختلف و پنج کتاب فیزیک مختلف را در یک قفسه کنار هم قرار داد در صورتی که:

الف) هیچ محدودیتی برای کنار هم قرار گرفتن کتاب‌ها نباشد.

ب) کتاب‌های ریاضی کنار هم قرار بگیرند.

پ) کتاب‌های هم‌نوع کنار هم قرار گیرند.

ت) هیچ دو کتاب از یک نوع کنار هم قرار نگیرند.

۶ به چند حالت ممکن می‌توان نام پنج معلم و پنج دانش‌آموز را در یک لیست قرار داد به طوری که هیچ دو معلمی اسمشان کنار هم نباشد؟

۷ از بین پنج مرد و پنج زن داوطلب برای استخدام در یک بانک به چند طریق می توان
الف) سه نفر صندوق دار انتخاب کرد.

ب) دو مرد و یک زن را انتخاب کرد.

۸ با حروف کلمه «خلیج فارس» به چند طریق می توان یک کلمه هشت حرفی نوشت به طوری که
الف) چهار حرف «ف»، «ا»، «ر» و «س» کنار هم باشند.

ب) واژه «فارس» بدون تغییر کنار هم قرار گیرند.

۹ به چند حالت ممکن می توان از بین شش زن و پنج مرد
الف) یک زوج انتخاب کرد.

ب) پنج زوج انتخاب کرد.

۱۰ از بین هفت دانش آموز ریاضی، شش دانش آموز تجربی و پنج دانش آموز انسانی به چند طریق
می توان یک گروه سه نفره انتخاب کرد به طوری که :

الف) مهم نباشد از چه رشته ای باشند.

ب) فقط از یک رشته باشند.

پ) از هر رشته فقط یک نفر انتخاب شود.

ت) حداقل دو نفر از رشته ریاضی باشند.

ث) از رشته انسانی کسی انتخاب نشود.



فصل ۷

آمار و احتمال

نگاه کلی به فصل

در این فصل که شامل سه درس است به دو موضوع احتمال و آمار پرداخته شده است. دانش‌آموزان از کلاس دوم دبستان با این دو اصطلاح آمار و احتمال آشنایی داشته، بعضی مفاهیم آماری را یاد گرفته‌اند و در مواردی همچون دسته‌بندی داده‌ها و رسم بعضی نمودارهای آماری مطالبی را یاد گرفته‌اند و نیز با احتمال تجربی در مقطع ابتدایی و احتمال ریاضی در متوسطه ۱ آشنایی داشته و حتی در پایه نهم از مجموعه‌ها در تعریف احتمال استفاده کرده و پیشامدهای تصادفی را تا حدودی به عنوان زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونه‌ای می‌شناسند.

تا سال نهم برای محاسبه احتمال رخداد یک پیشامد تصادفی از تکنیک‌های شمارشی و روش‌های ترکیبی، استفاده جدی نشده و امسال در کتاب دهم از جایگزینت و تبدیل و ترکیب برای شمارش و محاسبه تعداد کل حالت‌ها و نیز تعداد حالت‌های مطلوب استفاده خواهند کرد.

در بخش احتمال یکی از اهداف اصلی، معرفی زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای به عنوان پیشامدهای تصادفی می‌باشد.

هدف دیگر در بخش احتمال فصل هفتم، معرفی جبر پیشامدها یا اعمال روی پیشامدها بوده و اینکه در ادبیات به کار رفته در مسائل و تمرین‌ها، چگونه باید از الفاظی چون «و» و «یا» استفاده کرد.

استفاده از تکنیک‌های شمارشی که در فصل ۶ آموزش داده شده در حل مسائل احتمال نیز از اهداف دیگر این درس است.

از طرفی چون فضاهای نمونه‌ای مورد بحث در این درس همگی گسسته بوده و هنوز دانش‌آموزان با فضاهای پیوسته آشنا نشده و سابقه ذهنی ندارند به راحتی می‌توان اصول احتمال را در این فضا بیان و اثبات نموده و از آنها نیز در حل مسائل استفاده کرد.

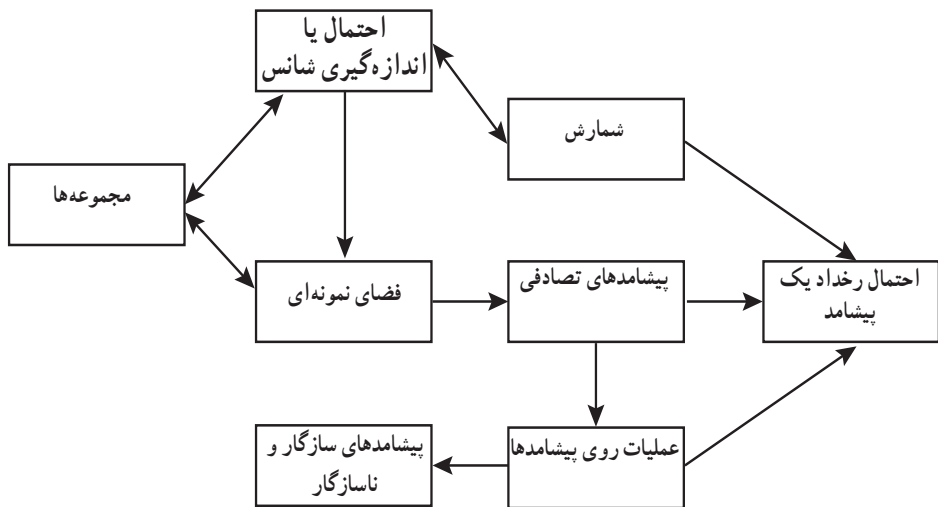
در بخش آمار و در درس دوم یعنی «مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه» به معرفی آمار و علم آمار به طوری دقیق پرداخته شده است و مواردی از کاربرد علم آمار را متذکر شده و توضیح داده‌ایم.

در این درس، اصطلاحات آماری مانند جامعه، نمونه، حجم جامعه و نمونه و غیره به صورتی دقیق تعریف و برای آنها مثال‌هایی زده شده است. هدف اصلی در این درس، اهمیت و کاربردهای علم آمار و آشنایی دانش‌آموزان با اصطلاحات آماری و بالا بردن سواد آماری آنهاست.

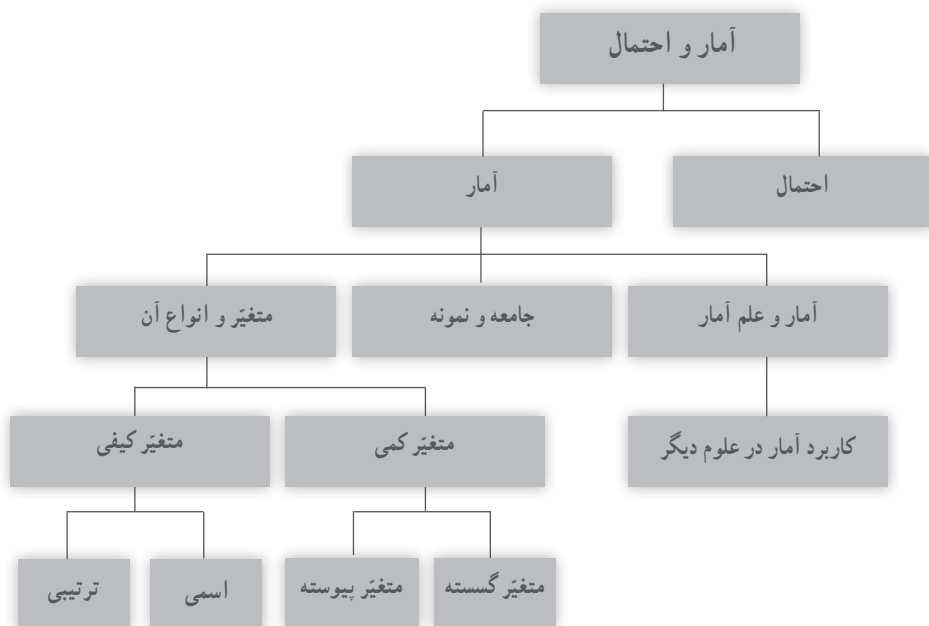
در درس سوم دانش‌آموزان با انواع متغیرها آشنا می‌شوند.

تعریف متغیر به عنوان ویژگی برای اعضای یک جامعه و دسته‌بندی کردن انواع متغیرها به دو دسته کلی متغیرهای کمی و متغیرهای کیفی می‌تواند در فهم مطالب آماری و نحوه برخورد دانش‌آموزان با مسائل آماری مؤثر باشد. درس سوم با هدف معرفی انواع متغیرهای کمی و نیز انواع متغیرهای کیفی و دسته‌بندی آنها ادامه یافته است و از مثال‌های متنوعی برای درک و تمایز این متغیرها از یکدیگر استفاده می‌شود.

نقشه مفهومی بخش مربوط به احتمال



نقشه مفهومی بخش مربوط به آمار



دانستنی‌هایی برای معلم

نظریهٔ احتمال به شاخه‌ای از علم ریاضی گفته می‌شود که با تحلیل وقایع تصادفی که ما از چگونگی رخداد آنها مطلع نیستیم، سر و کار دارد. میزان اطمینان ما از رخداد بعضی از رویدادها به صورت یک کمیت عددی—عددی بین صفر و یک— قابل توصیف است.

هر چقدر عدد حاصل—احتمال رخداد یک رویداد تصادفی—به صفر نزدیک‌تر باشد، اطمینان ما نسبت به رخداد آن پیشامد بیشتر است و هر چقدر به یک نزدیک باشد، اطمینان ما نسبت به رخداد آن پیشامد بیشتر است. امروزه احتمال برای علم آمار به عنوان یکی از ابزارهای قوی در تجزیه و تحلیل و تصمیم‌گیری به شمار می‌رود، وقتی صحبت از نمونه‌گیری تصادفی می‌شود، احتمال به کار می‌آید و وقتی صحبت از پیش‌بینی می‌شود باید از احتمال کمک گرفت و خلاصه رابطهٔ تنگاتنگی بین آمار و احتمال وجود دارد. در فلسفهٔ علم پیروان نظریهٔ عدم قطعیت بسیارند و بزرگرایان توانسته‌اند در بسیاری از شئون فلسفه حرف‌هایی برای مطرح کردن داشته باشند.

منابع

- ۱ دانشنامهٔ ریاضی، انتشارات کانون فرهنگی آموزش، پرویز شهریاری، حمیدرضا امیری، ...
- ۲ ورودی به نظریهٔ احتمال، انتشارات مدرسه، عین‌اله پاشا
- ۳ ورودی به نظریهٔ آمار، انتشارات مدرسه، عین‌اله پاشا
- ۴ آمار و احتمال مقدماتی، دکتر جواد بهبودیان، انتشارات دانشگاه امام رضا (ع)
- ۵ آمار مقدماتی، تألیف رونالدو وناکات، تامس اچ ووناکات، ترجمهٔ دکتر محمدرضا مشکانی، مرکز نشر.

نمونه سؤالات ارزشیابی بخش احتمال

- ۱ تاسی را می‌اندازیم. اگر زوج بیاید یک تاس دیگر می‌اندازیم و اگر فرد بیاید دو سکه می‌اندازیم:
 - الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟
 - ب) پیشامد A که در آن اعداد رو شده در دو تاس مثل هم باشند را تشکیل دهید.
- ۲ تمام اعداد دو رقمی را روی کارت‌هایی (روی هر کارت یک عدد) نوشته در کیسه‌ای می‌ریزیم و یک کارت به تصادف از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد عدد روی کارت خارج شده:
 - الف) فرد باشد
 - ب) زوج باشد

ج) اول و کمتر از 5° باشد

۲ در جعبه‌ای پنج مهره قرمز و چهار مهره آبی وجود دارد. یک مهره از این جعبه خارج کرده و بدون نگاه کردن به آن کنار گذاشته و سپس مهره دیگری به تصادف از جعبه، خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهره دوم آبی باشد.

۴ سه تاس را با هم می‌اندازیم مطلوب است احتمال آنکه:

الف) هر سه عدد رو شده مثل هم باشند.

ب) مجموع سه عدد رو شده شش باشد.

ج) مجموع سه عدد رو شده بزرگ‌تر از چهار باشد.

د) هر سه عدد رو شده زوج یا هر سه فرد باشند.

ه) حاصل ضرب سه عدد رو شده عددی اول باشد.

۵ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید:

$$p(A-B) \leq p(A)$$

۶ از بین پنج دانش‌آموز کلاس دهم ریاضی و چهار دانش‌آموز کلاس دهم تجربی یک تیم چهار نفره به

تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد:

الف) دانش‌آموزان ریاضی و تجربی در این تیم برابر باشند.

ب) حداقل یک دانش‌آموز ریاضی در این تیم باشد.

ج) حداکثر سه دانش‌آموز تجربی در این تیم باشد.

۷ نه نفر که سه نفر آنها هم کلاسی هستند، به تصادف در یک ردیف قرار می‌گیرند، چقدر احتمال دارد:

الف) سه نفر هم کلاسی کنار هم نباشند

ب) یکی از این سه نفر در اول صف، یکی در وسط و یکی در آخر صف قرار بگیرند.

۸ در هر یک از موارد زیر جامعه، نمونه و ویژگی مربوطه را مشخص کنید.

الف) معلمی می‌خواهد در مورد نمرات درس ریاضی دهم در یک مدرسه، تحقیقی را انجام دهد. گروهی از دانش‌آموزان پایه دهم را انتخاب می‌کند.

ب) مدیر یک فروشگاه زنجیره‌ای می‌خواهد در مورد فروش روزانه محصول جدید، تحقیقی را انجام دهد. تعداد محصولات به فروش رفته در یک روز را انتخاب می‌کند.

۹ کدام یک از متغیرهای زیر گسسته و کدام پیوسته‌اند؟

الف) تعداد سهام فروخته شده در بازار بورس در هر روز

ب) طول عمر لامپ‌های تلویزیونی که توسط یک کارخانه تولید شوند.

احتمال یا اندازه گیری شانس

اهداف

- یادآوری و تکمیل مفاهیم مربوط به آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی به عنوان زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای
- مشخص کردن پیشامدهای تصادفی در حالت‌های مختلف و یافتن تعداد اعضای آنها با ابزار ترکیبیات
- آشنا شدن دانش‌آموزان با جبر پیشامدها و اعمال روی پیشامدها و استفاده از آنها در حل مسائل
- طرح و حل مسائل پیشرفته‌تر (نسبت به سال نهم) با استفاده از جایگشت، تبدیل و ترکیب در محاسبه $n(A)$ و $n(S)$.

روش تدریس

این درس با معرفی چند تعریف و اصطلاح و یادآوری آنها به عنوان مقدمه آغاز شده و اولین فعالیت در صفحه ۱۴۲ فعالیت مربوط به انداختن دو تاس است که فعالیتی بسیار غنی و جذاب برای دانش‌آموزان است. در جدول 6×6 که رسم شده، الگوهای بسیاری وجود داشته است که دانش‌آموزان باید با تعریف پیشامدهایی این الگوها را مشخص کنند (هاشور بزنند یا قطر بکشند). در عین حال به‌طوری کاملاً شهودی ملاحظه خواهند کرد که مثلاً (۱ و ۲) با (۲ و ۱) چه فرقی دارد و این دو زوج مرتب خانه‌هایی مجزاً از جدول را اشغال کرده‌اند.

توصیه می‌شود وقت کافی و مناسب برای این فعالیت اختصاص داده شود؛ زیرا در صفحات

بعدی مجدّد به این فعالیت ارجاع خواهد شد.

در کار در کلاس صفحه ۱۴۳ دانش‌آموزان باید جدولی 2×6 یا 6×2 رسم کنند و تمام حالت‌های ممکن را در انداختن یک تاس و یک سکه را مشاهده نمایند. توضیح اینکه در این آزمایش تصادفی به طور مثال (۵ و پ) با (پ و ۵) فرقی نمی‌کند و هر دو نشان‌دهنده این حالت‌اند که سکه پشت آمده و تاس عدد ۵ را نشان می‌دهد.

بهتر است از دانش‌آموزان بخواهیم همه حالت‌های ممکن در پرتاب دو سکه و یک تاس را نیز تشکیل داده و بنویسند.

مثال ۱ در صفحه ۱۴۳ شبیه به خانواده سه فرزندی است که در سال نهم مورد بررسی قرار گرفته است و دانش‌آموزان در این مثال، با پر کردن جاهای خالی، حالت‌های مورد نظر را بررسی و با مسئله ترتیب به دنیا آمدن فرزندان نیز آشنا می‌شوند.

مثال ۲ در صفحه ۱۴۴ برای اولین بار برداشت بیش از یک مهره از یک جعبه را تجربه کرده و از فرمول ترکیب برای محاسبه $n(S)$ استفاده می‌کنند.

در همین صفحه ۱۴۴ اعمال روی پیشامدها (جبر پیشامدها) معرفی؛ و معادل با هر یک از آنها بیان توصیفی مربوطه نیز آمده است تا دانش‌آموزان در مسائل بتوانند تشخیص بدهند که چه زمانی باید از اجتماع، یا اشتراک یا تفاضل دو پیشامد استفاده کنند.

با توجه به تعریف متمم یک مجموعه در فصل اول، متمم یک پیشامد در صفحه ۱۴۵ تعریف و همچنین دو و سه پیشامد ناسازگار نیز معرفی شده‌اند و مثال ۳ برای درک دقیق این مفاهیم آورده شده است، توصیه می‌شود با طرح مثال‌های شبیه مثال ۳ برای آزمایش‌های تصادفی دیگر، به تبیین این مفاهیم پرداخته شود.

در کار در کلاس صفحه ۱۴۵ و با ارجاع به فعالیت اول این درس (انداختن دو تاس) و استفاده از الفاظ «و» و «یا» کاربرد جبر پیشامدها را در حل مسائل به دانش‌آموزان نشان می‌دهیم، همچنین در قسمت دوم این کار در کلاس صفحه ۱۴۶ روی مفهوم پیشامدهای سازگار و ناسازگار تمرین می‌شود.

ذکر مثال ۵ در صفحه ۱۴۶ تمرینی است برای استفاده از جبر پیشامدها تا سعی کنید مثال‌هایی که شبیه به این مثال در کلاس طرح کنید و از دانش‌آموزان بخواهید مثال‌هایی شبیه به این مثال‌ها طراحی و حل کنند.

در پاراگراف انتهایی صفحه ۱۴۶ به یادآوری فرمول احتمال رخداد یک پیشامد پرداخته و اینکه عدد احتمالی یک پیشامد در چه بازه‌ای تغییر کرده است و چه وقت رخداد یک پیشامد محتمل‌تر و چه وقت شانس کمتری برای رخداد آن وجود دارد.

توصیه می‌شود برای اینکه خوش‌تعریف بودن رابطه $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تا حدی برای دانش‌آموزان جا بیفتد. مثال: از یک جعبه شامل مثلاً ۴ مهره رنگی قرمز و ۸ مهره آبی زده شود و ۱ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود که احتمال آبی بودن این مهره $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ و احتمال قرمز بودن آن $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ است و این نکته تأکید شود که انتظار ما این است که این مهره، آبی باشد و چون تعداد مهره‌های آبی دو برابر تعداد قرمزهاست، انتظار ما این است که این احتمال دو برابر باشد و البته اعداد به دست آمده مؤید همین مطلب می‌باشند ($\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$).

در فعالیت صفحه ۱۳۷ به نوعی سه اصل معروف کولموگروف البته در فضاهای گسسته و هم شانس اثبات شده و هدف اصلی، استفاده از این رابطه‌ها در حل مسائل می‌باشد.

در صفحه ۱۴۸ کار در کلاس و مثال مطرح شده استفاده از فرمول‌های قبل را مرور کرده و حل این مثال، به درک و فهم دانش‌آموزان در استفاده از این اصول و جبر پیشامدها کمک می‌کند. مثال دوم صفحه ۱۴۹ شبیه مثالی در فصل ۶ است و از ابزارهای شمارشی اصل ضرب و فاکتوریل برای محاسبه تعداد حالت‌های مطلوب استفاده می‌کند. توصیه می‌شود نمونه این مثال برای دانش‌آموزان طرح و توسط ایشان حاصل شود. تمرین‌های آخر این درس، همگی در حد مطالب داخل درس است و پس از حل توسط دانش‌آموزان در منزل باید توسط همکاران بازبینی شود.

حل تمرین‌های آخر درس اول از فصل ۷

۱ هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچک‌تر از بازده را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیده تصادفی را مشخص کنید.

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟ $2^5 = 32$

ج) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر چهار بخش پذیر باشد»، مشخص کنید.

$$A = \{4, 8\}$$

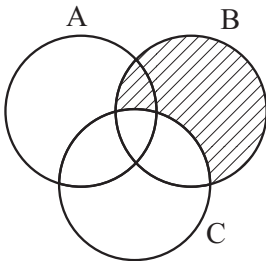
۲) فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارت‌های

توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

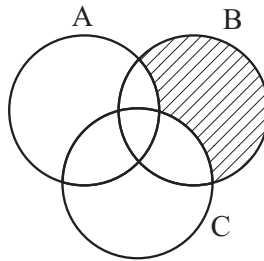
الف) پیشامدهای A، C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

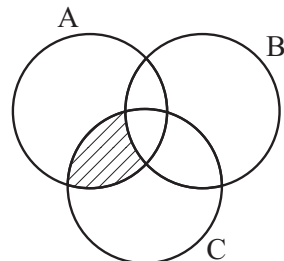
ج) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.



(ج)



(ب)



(الف)

۳) هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛

سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد»

$$S = \{1, 2, \dots, 8\} \text{ و } A = \{2, 4, 6, 8\}$$

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد»

$$B = \{1, 3, 5, 7\}$$

ج) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد»

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

۴) خانواده‌ای سه فرزند دارد. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه

حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

$$S = \{(پ, پ, پ), (د, پ, پ), (پ, د, پ), (د, د, پ), (پ, پ, د), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, د)\}$$

$$A = S - \{(پ, پ, پ)\}$$

۵) سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید، دو سکه

دیگر می‌اندازیم:

(الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
فضای نمونه‌ای 10° عضو دارد.

(ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید. $A = \{(۲ \text{ و } ۴) \text{ و } (۶ \text{ و } ۲) \text{ و } (۴ \text{ و } ۲)\}$
(ج) پیشامد آنکه «حداقل دو سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

$$B = \{(ر, ر, ر) \text{ و } (ر, ر, پ) \text{ و } (ر, پ, ر) \text{ و } (پ, ر, ر)\}$$

۶ می‌خواهیم از بین سه دانش‌آموز کلاس دهم رشته ریاضی و دو دانش‌آموز دهم رشته تجربی یک تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:

(الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

(ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند؟

(ج) یک نفر از رشته ریاضی و یک نفر از رشته تجربی باشد؟

$$\text{الف) } p(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

$$\text{ب) } p(B) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

$$\text{ج) } p(C) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$

۷ یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A, B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد مشتریان کارت نوع A ($p(A) = \frac{34}{100}$) و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{34}{100} + \frac{62}{100} - \frac{15}{100} = \frac{86}{100}$$

۸ اگر هفت نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال

دارد:

$$\text{الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟} \quad p(A) = \frac{7! - (6! \times 2!)}{7!} = \frac{5}{7}$$

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

$$p(B) = \frac{2 \times 5!}{7!} = \frac{1}{21}$$

۹ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \subseteq B$ ، ثابت کنید، $P(A) \leq P(B)$.

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow p(A) \leq p(B)$$

مادر عصر احتمال به سر می‌بریم	حتی
در عصر شک و شاید	یک لحظه احتمال ندارم
در عصر پیش‌بینی وضع هوا	پشمان تو
از هر طرف که باد بیاید	عین‌الیقین من
در عصر قاطعیت تردید	قطعیت نگاه تو
عصر جدید	دین من است
عصری که هیچ اصلی	من از تو ناگزیرم
جز اصل احتمال، یقینی نیست	من
اما من	بی‌نام ناگزیر تو می‌میرم
بی‌نام تو	

قیصر امین پور



مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

درس دوم

اهداف

در این درس، به دنبال معرفی آمار و علم آمار و بیان تفاوت‌های بین آنها هستیم. همچنین به بررسی نقش اعداد و ارقام در زندگی روزمره یک خانواده پرداخته‌ایم. از سویی دیگر با معرفی در مفهوم جدید تحت عنوان جامعه و نمونه، مفاهیم کلیدی در علم آمار معرفی شده است.

روش تدریس

در این درس، با تأکید بر مفهوم آمار و علم آمار و بیان تفاوت‌های بین آنها به دنبال آن هستیم که تفکر جدیدی را در علم آمار معرفی کنیم. در مثال مربوط به هواشناسی، بخش‌های علم آمار قرار داده شده است که در ادامه تعریف این دو واژه، این بخش‌ها را ملاحظه می‌فرمایید. در کار در کلاس این درس، به دنبال آن هستیم که مثال‌هایی از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی را بر اساس اعداد و ارقام بیان نماییم و در ادامه با استفاده از نقشه‌های مفهومی، تأکید بسیاری روی مفهوم علم آمار داریم و همچنین پیداسازی مثال مربوط به هواشناسی روی نقشه مفهومی می‌تواند مفهوم علم آمار را برای دانش‌آموز کاملاً تثبیت نماید. در تمرین‌های اولیه این درس نیز با تأکید به تفاوت آمار و علم آمار و همچنین استفاده از پیش‌بینی در علم آمار روی پدیده‌های تصادفی، این مفهوم را کامل بیان می‌نماییم. در انتها برای تمرین هفت و هشت، با بیان کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر (پردازش تصویر)، کاربردهای مهم علم آمار بیان می‌شود. نکته لازم آن است که دانش‌آموزان برای پاسخ به

این سؤال می‌بایست این کاربرد را به دقت مطالعه کنند.

از سویی دیگر برای بیان مفهوم جامعه و نمونه به معرفی کاربرد علم آمار در پزشکی، مفهوم شاخص توده بدن پرداخته شده است که نکات جدایی را در مورد چاقی افراد بیان می‌کند. دانش‌آموزان برای پاسخ به فعالیت و کار در کلاس‌های آتی می‌بایست به دقت این کاربرد را مطالعه نمایند.

در ادامه فعالیت مربوط به مفهوم جامعه و نمونه، جامعه‌ای از افراد چاق و عادی مشخص شده است که شمارش افراد چاق موجود در شهر بسیار دشوار بوده، ولی این کار برای نمونه انتخابی ساده است. در اینجا هدف بیان مفهوم جامعه و نمونه است و همچنین تعریف اندازه، یا حجم جامعه و نمونه و نهایت در کار در کلاس و تمرین‌های آتی این مفهوم به صورت کامل تثبیت شده است.

متغیر و انواع آن

درس سوم

اهداف

در این درس، به دنبال مفهوم متغیر و معرفی اقسام متغیر هستیم. در آمار انواع متغیرها نقش بسیار مهمی در تحلیل‌های آماری دارند. در این درس، این مفاهیم به طور کامل تثبیت می‌شود.

روش تدریس

در فعالیت اول این درس با بیان محصولات هلوی یک مزرعه کشاورزی، دو ویژگی این میوه بیان می‌شود که یکی وزن و دیگری کیفیت این میوه می‌باشد و سؤالاتی در مورد کیفیت میوه هلوی از دانش‌آموز شده و روی این موضوع تأکید شده است که کیفیت میوه هلوی قابل اندازه‌گیری نیست و آن را به صورت درجه یک، درجه دو، درجه سه می‌توانیم مشخص کنیم و با دادن اعداد دلخواه «یک» برای میوه‌های بسیار مرغوب، «دو» برای میوه‌های متوسط و عدد «سه» برای میوه‌های ریز، به نوعی این ویژگی را مقداردهی می‌کنیم. گفتنی است که اعداد در اینجا صرفاً نشان‌دهنده ویژگی میوه هلوی هستند و هر عدد دلخواهی را به صورت قراردادی می‌توانیم به این ویژگی نسبت دهیم. به عبارت بهتر اعداد برای این ویژگی به صورت کد هستند و قابل جمع و تفریق، ضرب و تقسیم نیستند. برای پاسخ به قسمت پ این فعالیت می‌بایست کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی را به دقت مطالعه نمود.

در ادامه دانش آموز با مفهوم متغیر و مقدار متغیر آشنا می شود. نکته خلی مهمی که دبیران محترم می بایست به آن توجه نمایند آن است که مقدار متغیر عددی است که به ویژگی یک عضو نسبت داده می شود. این عدد می تواند قابل اندازه گیری باشد، یا نمی تواند قابل اندازه گیری باشد.

به عنوان مثال، عدد ۲۰۰ گرم برای میوه هلو، عددی قابل اندازه گیری است، ولی عدد ۱ و ۲ و ۳ که نشان دهنده درجه کیفیت میوه هلو است قابل اندازه گیری نیست و صرفاً به صورت قراردادی این اعداد به کیفیت هلو نسبت داده می شود، یا می توان مقدار مربوط به کیفیت میوه هلو را به صورت قراردادی درجه یک، درجه دو و درجه سه معرفی نمود.

این موضوع در کار در کلاس این درس مطرح شده است که تأکید زیادی روی مقدار رنگ خودرو شده است که رنگ خودرو با رنگ های مشکی، سفید و... در نظر گرفت که آنها را با اعداد دلخواهی مانند عدد یک برای رنگ مشکی و عدد دو برای رنگ سفید نشان داد یا همان رنگ ها را برای مقادیر این متغیر نوشت.

در ادامه، این مفهوم به صورت خوبی در کار در کلاس بیان شده است. در قسمت سوم کار در کلاس با مطالعه علم آمار در محیط زیست می توان ویژگی های یوزپلنگ ایرانی را بیان نمود.

در ادامه این درس، با مفهوم متغیرهای کمی و کیفی آشنا شده و این متغیرها با کامل کردن فعالیت مربوط برای دانش آموز تثبیت می شود. لازم به ذکر است دانش آموزان می بایستی در قسمت «الف» این فعالیت جدول مورد نظر را کامل کنند. خط تیره ای که در ردیف اول این جدول قرار دارد نشان دهنده آن است که از آقای مورد نظر سؤالی در مورد تعداد فرزندان نشده است. در قسمت «ب» این فعالیت، دانش آموزان باید نمودار مورد نظر را براساس متغیرهای معرفی شده در جدول می بایست کامل کنند. در ادامه با مفهوم انواع متغیرهای کمی و کیفی آشنا شده و کار در کلاس ها و تمرین های متنوعی مطرح می شوند.

حل کار در کلاس‌ها و تمرین‌ها

۱ در پیرامون خود، مثال‌هایی را از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی بر اساس اعداد و ارقام بیاورید.

۲ مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

• جمع‌آوری اعداد و ارقام

• سازمان‌دهی و نمایش

• تحلیل و تفسیر داده

• پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی

۳ با در نظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

• جمع‌آوری اعداد و ارقام هواشناسی

• سازمان‌دهی و نمایش آمار مربوط به دمای هوا، میزان رطوبت و بارش در ایستگاه‌های هواشناسی

• تحلیل و تفسیر آمار هواشناسی

• پیش‌بینی وضعیت هوا

۴ تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟ آمار اعداد و ارقام است، ولی علم آمار مجموعه روش‌هایی شامل

جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازمان‌دهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری می‌باشد.

۵ مدیر کارخانه‌ای برای پیدا کردن تعداد کل لامپ‌های معیوب در یک ماه آینده، می‌خواهد یک تحقیق

آماری انجام دهد. برای این منظور، تعداد لامپ‌های معیوب را در چند روز کاری به صورت زیر جمع

آوری کرده است.

روز کاری پنجم	روز کاری چهارم	روز کاری سوم	روز کاری دوم	روز کاری اول	روزهای کاری
۱۸۰	۱۲۰	۹۰	۷۰	۵۰	تعداد لامپ‌های معیوب



کارخانه لامپ‌سازی

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان دهنده چه چیزی است؟ افزایش تعداد لامپ‌های معیوب

ب) در این تمرین، چه چیزی به عنوان آمار محسوب می‌شود؟ تعداد لامپ‌های معیوب

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه براساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها ادامه خط تولید لامپ‌ها

۶ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع‌آوری داده‌هاست. درست

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجه استفاده از «علم آمار» است. درست

پ) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است. نادرست

۷ به شکل زیر توجه کنید : آیا این شکل را می‌توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد؟ اعداد و ارقام آن

چگونه‌اند؟ برای پاسخ به این سؤالات، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید. بله، اعداد و

ارقام به صورت جدول‌های عددی‌اند که هر عدد نشان‌دهنده مقدار روشنایی هر پیکسل است.



کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر (پردازش تصویر)

هر تصویر از تعداد زیادی مربع‌های کوچک تشکیل شده است. هر یک از این مربع‌های کوچک «پیکسل» نام دارند و به هر پیکسل می‌توان یک عدد را نسبت داد که بیانگر مقدار روشنایی آن است. در واقع هر تصویر از یک جدول عددی تشکیل می‌شود که هر یک از اعداد، مقدار روشنایی هر پیکسل را نشان می‌دهند. جدول مربوط به هر تصویر را به راحتی می‌توان به دست آورد. در اینجا نکته‌ی حائز اهمیت، کاربرد «پردازش تصویر» است.

«پردازش تصویر» یکی از موضوعات بسیار مهم در مهندسی کامپیوتر محسوب می‌شود. رشد استفاده از پردازش تصویر در سیستم‌های «کنترل هوشمند سرعت»، «خواندن اتوماتیک پلاک خودرو در طرح‌های زوج و فرد»، «طرح ترافیک» و «ثبت تخلفات خودرو» در سال‌های اخیر مشهود بوده است. با استفاده از معیارهایی که در علم آمار وجود دارد، می‌توان به بررسی کیفیت تصاویر پرداخت و تصاویر مخدوش و نامناسب را با تصاویر حقیقی‌شان مقایسه کرد.



کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر



۸ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می‌شود. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز را با عدد ۱ و رنگ مشکی را با عدد صفر، نشان دهیم. جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.

؟			۱	؟	؟
		؟	؟	؟	۰
	؟	؟	؟	۰	۳

شکل

جدول عددی

اندازه نمونه	نمونه	اندازه جامعه	عضو جامعه	جامعه
۱۰۰۰	قطعات تولیدی انتخابی	۶۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه الف
۷۵۰	قطعات تولیدی انتخابی	۵۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه ب

تمرین

۱ می‌خواهیم درباره کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید:



ویژگی مورد بررسی	اندازه نمونه	اندازه جامعه	جامعه
کیفیت محصولات تولیدی	۱۰۰	۱۰۰۰۰	محصولات تولیدی یک کارخانه

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اندازه جامعه، کمتر از اندازه نمونه است. نادرست

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه اند. درست

پ) نمونه زیر، مجموعه‌ای از جامعه است. درست

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند.

هر صف افقی نشان‌دهنده تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو

نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.

جامعه تمامی دانش‌آموزان مدرسه که اعضای آن همه دانش‌آموزان آن هستند.



دو نمونه دلخواه

فعالیت

در یک شهر، با افراد مختلفی روبرو می‌شویم و از آنها سؤالاتی می‌کنیم. آنها به صورت زیر، به سؤالات ما پاسخ داده‌اند. به عنوان مثال:

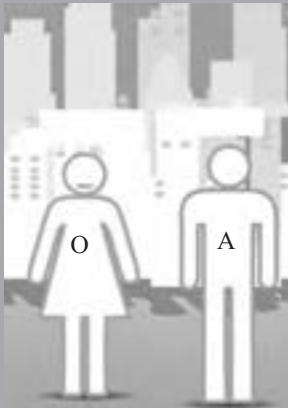
از مادر یک خانواده می‌پرسیم:
«چند فرزند دارید؟»



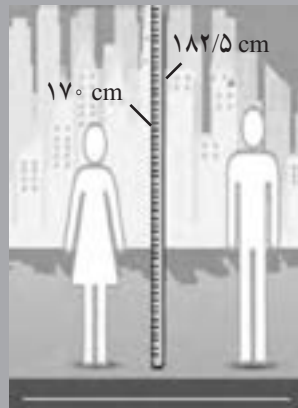
از یک آقا و خانم می‌پرسیم: «چقدر از
آشپزی کردن لذت می‌برید؟»



و سؤال آخر: «گروه خونی خود را
بگویید؟»



از همان خانم و آقا می‌پرسیم: «قد شما چند
سانتی متر است؟»

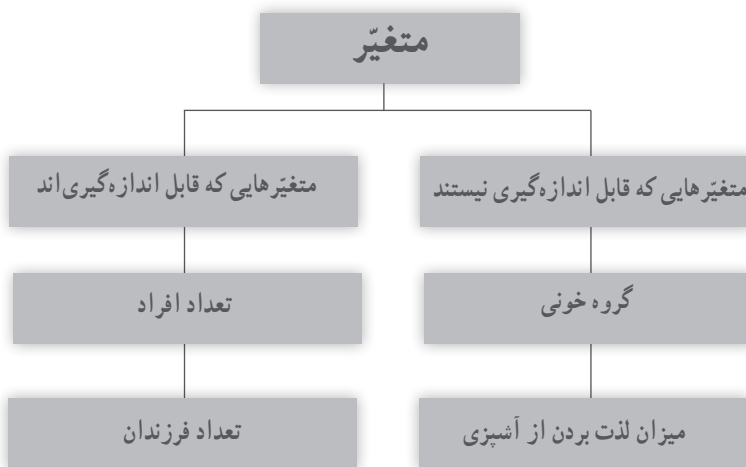


حال به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) با توجه به شکل‌های مورد نظر، پاسخ‌های افراد را در جدول زیر قرار دهید و آن را کامل کنید.

نام متغیر		
تعداد فرزندان	۲	-
قد افراد	۱۷۰	۱۸۲/۵
گروه خونی	O	A
میزان لذت بردن از آشپزی	بسیار زیاد	کم

ب) با توجه به متغیرهای بیان شده، کدام متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند و کدام نیستند؟ به جای علامت سؤال، نام متغیر مورد نظر را بنویسید.



تعریف متغیرهای کمی

متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری اند، «متغیرهای کمی» گویند. به عنوان مثال، تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی اند.

تعریف متغیرهای کیفی

به متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند. به عنوان مثال، گروه خونی افراد و پاسخ کار در کلاس «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی اند.

۱ با توجه به شکل‌ها، جملات را کامل کنید :

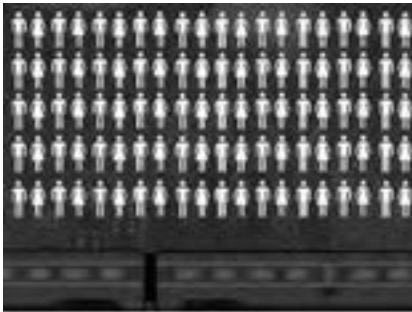
در شکل «الف»، تعداد مسافران یک قطار، یک متغیر... کمی... است.

در شکل «ب»، اقوام ایرانی یک متغیر... کیفی... است.

در شکل «پ»، قد فرد، یک متغیر... کمی... است.

در شکل «ت»، جنسیت افراد یک متغیر... کیفی... است.

الف



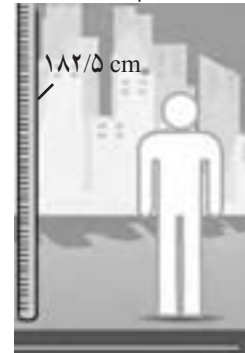
ب



ت



پ



۲ نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید :

کیفی کمی

الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده)

کیفی کمی

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید.

کیفی کمی

پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای)

۳ جدول زیر را کامل کنید.

نوع متغیر	پاسخ (مقدار متغیر)	سؤال (متغیر)
کیفی	مشکی، قهوه‌ای، طلایی، سفید، قرمز	موی شما چه رنگی است؟
کمی	۶۰ تا ۷۰ کیلوگرم	وزن شما چه عددی است؟
کیفی	بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم، لذت نمی‌برم	چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟

انواع متغیرهای کمی

فعالیت

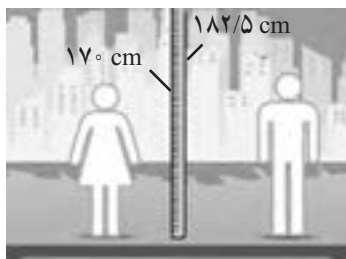
همان‌گونه که در فعالیت قبل مطرح شد، پاسخ دو سؤال زیر، متغیرهایی از نوع کمی اند.

۱ از مادر یک خانواده می‌پرسیم : چند فرزند دارید؟

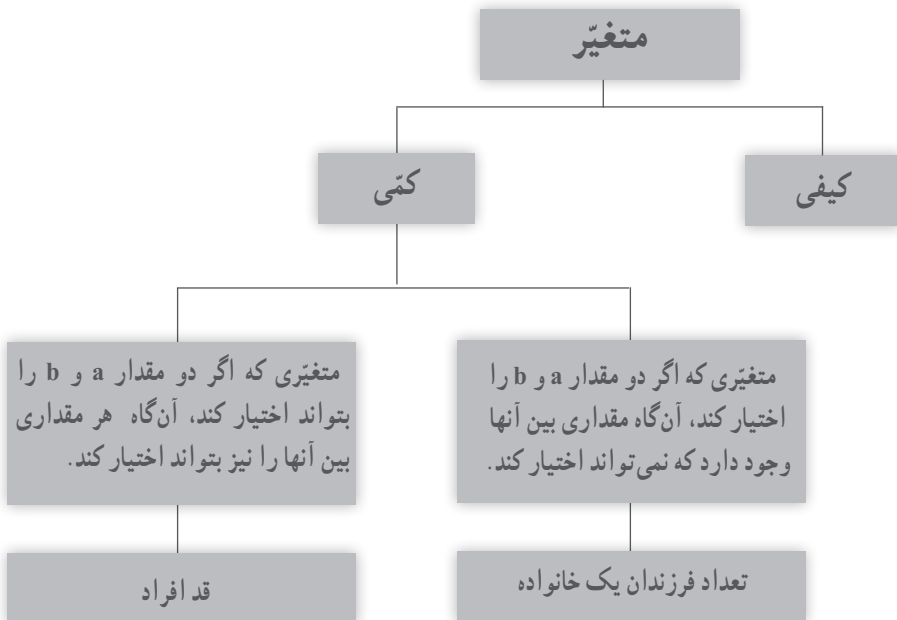
برخی از جواب‌های ممکن : ۰، ۱، ۲، ۳ و ...

۲ قد شما چند سانتی‌متر است؟

برخی از جواب‌های ممکن : ۱۵۰ سانتی‌متر تا ۱۷۰ سانتی‌متر، ۱۵۹ سانتی‌متر، ۱۶۰/۵ سانتی‌متر و ...



- ۳ فرض کنید کمترین و بیشترین وزن در جامعه دانش‌آموزان پایه دهم کشور به ترتیب ۴۶ کیلوگرم و ۷۵ کیلوگرم باشد. در این صورت، وزن تمام دانش‌آموزان کشور در بازه [۴۶, ۷۵] قرار می‌گیرد. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند وزن یک دانش‌آموز باشد؟ بله، می‌تواند قرار گیرد.
- ۴ فرض کنید کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور به ترتیب 0° و 20° باشد. در این صورت، تعداد فرزندان هر خانواده در این کشور عددی صحیح از بازه $[0^\circ, 20^\circ]$ خواهد بود. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند نشان‌دهنده تعداد فرزندان یک خانواده باشد؟ خیر، نمی‌تواند باشد.
- ۵ متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ کمی‌اند و یا کیفی؟
- ۶ چه تفاوتی در متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ وجود دارد که جواب‌های مربوط به آنها متفاوت است؟
- ۷ با توجه به قسمت‌های ۳ و ۴ در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب قرار دهید.



انواع متغیر کمی

۱ متغیر پیوسته ۲ متغیر گسسته

تعریف متغیر پیوسته

متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. به عنوان مثال، وزن یک دانش‌آموز می‌تواند ۴۶ کیلوگرم، ۴۷ کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.



تعریف متغیر گسسته

متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. به عنوان مثال، تعداد فرزندان یک خانواده متغیر گسسته است.

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کمی زیر را مشخص کنید.

الف) سرعت خودرو یک متغیر پیوسته است. مقدار آن متغیر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

ب) میزان مصرف بنزین این خودرو، یک متغیر کمی و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر ۱۰ است.

پ) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر کمی است و این تعداد، برابر با چهار است.



۲ انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید :

- الف) تعداد ماهی‌های یک دریا
- ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید.
- پ) وزن افراد
- ت) تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه
- گسسته پیوسته
- گسسته پیوسته
- گسسته پیوسته
- گسسته پیوسته

۳ در جدول زیر، پاسخ شما چه نوع متغیری (گسسته یا پیوسته) است؟

سؤال (متغیر)	پاسخ (مقدار متغیر)	نوع متغیر
قد شما چه عددی است؟	عددی بین ۱۷۲ تا ۱۸۵ سانتی‌متر	پیوسته
وزن شما چه عددی است؟	۸۰/۵ کیلوگرم	پیوسته
تعداد دوستان شما چند نفر است؟	۰، ۱، ۲، ۳،	گسسته
وزن دوستان چه عددی است؟	۰، ۷۱، ۷۲ و کیلوگرم	پیوسته
شاخص توده بدن خانواده شما چه عددی است؟	۲۲، ۳۲/۵، ۳۰ و	پیوسته
ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟	عددی بین ۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر	پیوسته

انواع متغیرهای کیفی

فعالیت

۱ به سؤال‌های زیر توجه کنید :

سؤال : از یک آقا و خانم می‌پرسیم : چقدر از آشپزی کردن لذت می‌بری؟

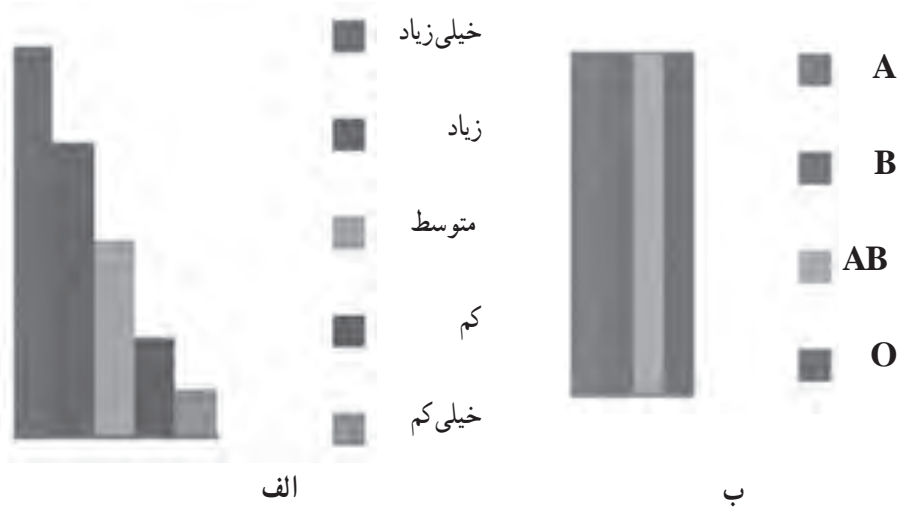
برخی از جواب‌های ممکن : خیلی زیاد، زیاد، متوسط، کم، خیلی کم

سؤال : گروه خونی خود را بگویید.

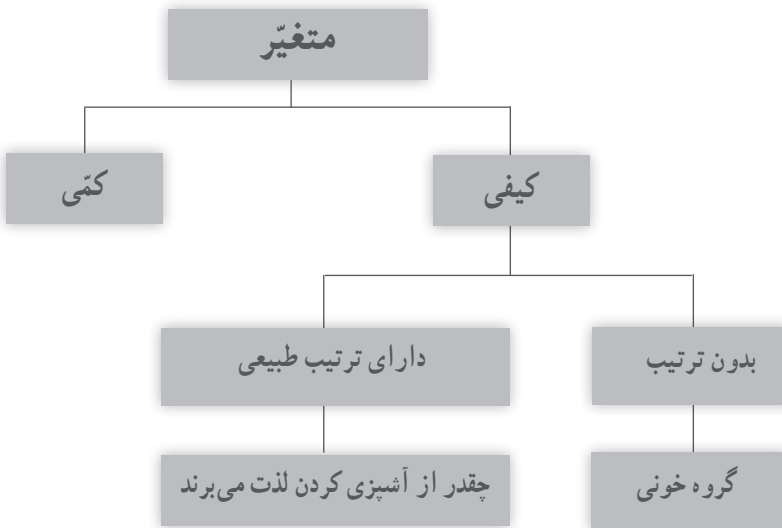
برخی از جواب‌های ممکن : گروه خونی A، B، AB، O

در پاسخ به سؤال اول، یک ترتیب طبیعی وجود دارد؛ همانند شکل «الف» در صورتی که در پاسخ به سؤال

دوم نمی‌توان ترتیب طبیعی قائل شد، شکل «ب» را ملاحظه کنید.



۲ در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب را قرار دهید.



متغیرهای ترتیبی و اسمی

انواع متغیر کیفی :

متغیرهای کیفی قابل اندازه‌گیری نیستند. این متغیرها به دو دسته زیر تقسیم می‌شود :

۱ متغیر ترتیبی ۲ متغیر اسمی (غیر ترتیبی)

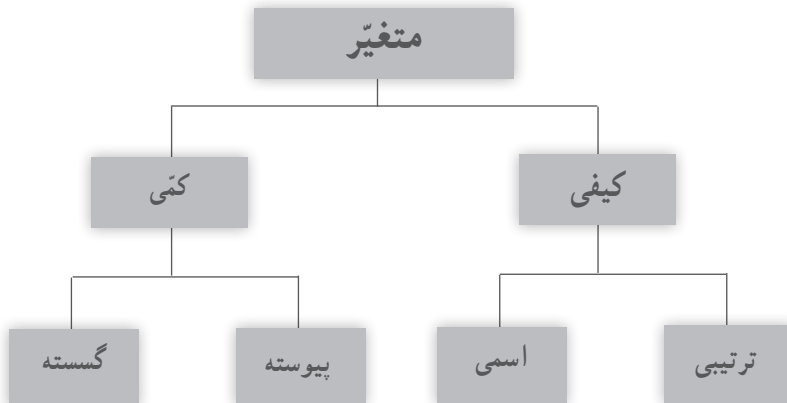
متغیر ترتیبی

متغیری است که در آن، نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به عنوان مثال، سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

متغیر اسمی (غیر ترتیبی)

متغیری کیفی است که ترتیبی نیست؛ مانند جنسیت (زن و مرد)

انواع متغیرها در یک نگاه



کار در کلاسی

با توجه به شکل‌های زیر جملات زیر را کامل کنید:

در شکل «الف»، جنسیت افراد، یک متغیر اسمی است و مقادیر آن زن و مرد است.

در شکل «ب»، مقام‌هایی که یک ورزشکار در مسابقه به دست می‌آورد، یک متغیر کیفی است و مقادیر آن مقام اول، مقام دوم و مقام سوم است.

در شکل «پ»، میزان علاقه شما درباره خورش قیمه سؤال شده است که یک متغیر کیفی است و مقادیر آن بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم است.



الف

مقام اول

مقام دوم

مقام سوم

ب



پ

بسیار زیاد

زیاد

متوسط

کم

بسیار کم



معلمان محترم و صاحب نظران گرامی می‌توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵ - گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی متوسطه نظری