بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّهُمَّ صَلِّ عَلی مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضیات گسسته

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

راهنمای معلم

پایهٔ دوازدهم
دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: راهنمای معلم ریاضیات گسسته ـ پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۳۶۲

پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سید محمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام‌صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، فریبا جباری، فیروز خدابخشی، ابراهیم ریحانی و محمدرضا سید صالحی (اعضای گروه تألیف) ـ جعفر ربّانی (ویراستار)

مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ زهره بهشتی‌شیرازی (صفحه‌آرا)ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ مرضیه اخلاقی، سیدکیوان حسینی، آذر روستایی‌فیروزآباد، فاطمه پزشکی و حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)

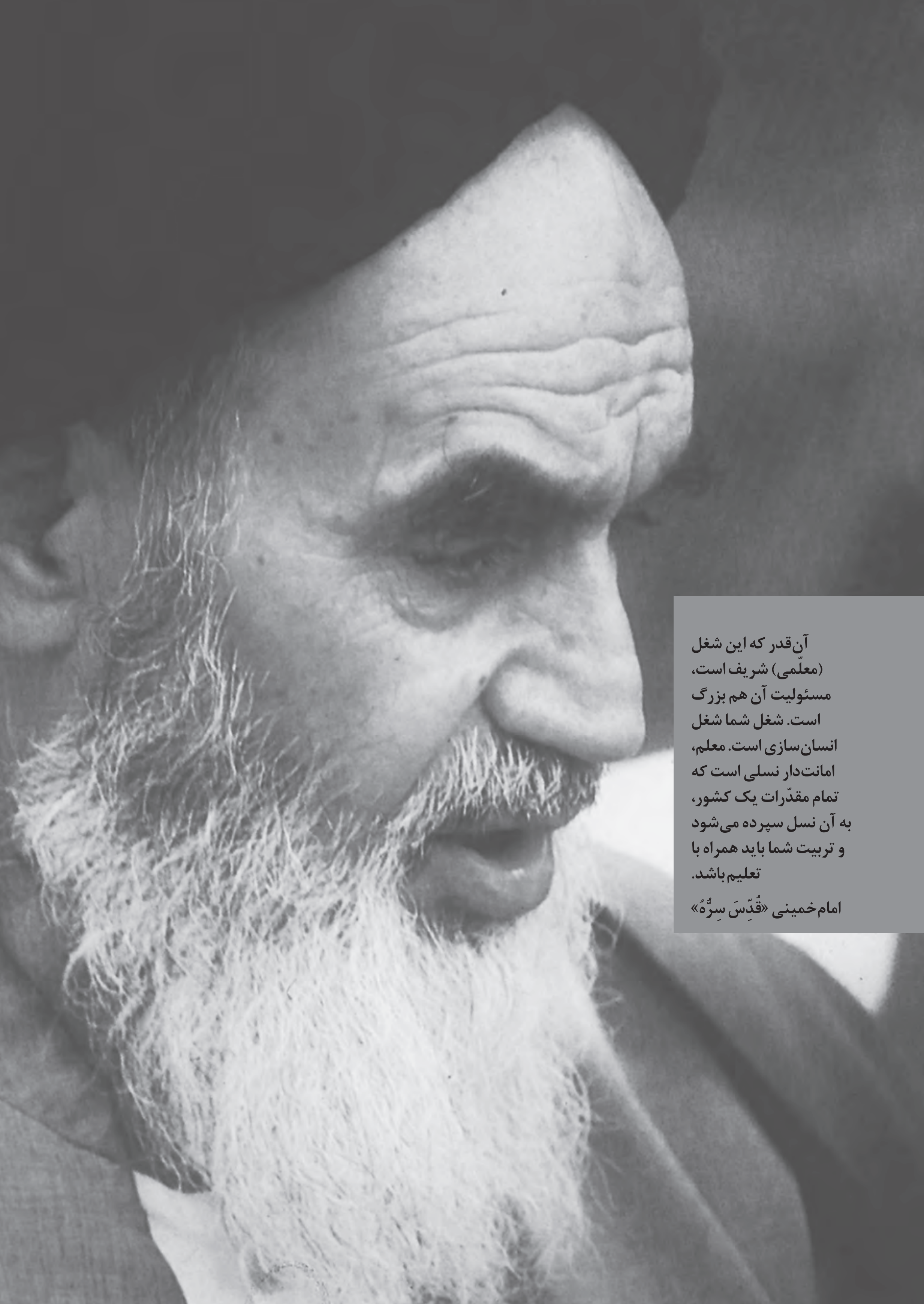
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۸

شابک ۹ـ۳۴۰۶ـ ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-3406-9



آن‌قدر که این شغل (معلّمی) شریف است، مسئولیت آن هم بزرگ است. شغل شما شغل انسان‌سازی است. معلم، امانت‌دار نسلی است که تمام مقدّرات یک کشور، به آن نسل سپرده می‌شود و تربیت شما باید همراه با تعلیم باشد.

امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

فهرست مطالب

فصل اول: آشنایی با نظریهٔ اعداد

فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

فصل سوم: ترکیبیّات (شمارش)

سخنی با معلّم

ساختار کتاب درسی ریاضیات گسسته بر اساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین طراحی شده است. فعالیت‌ها، موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم ریاضی فراهم می‌کنند و مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان هستند. معلم در این میان نقش مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها بر عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها توسط معلم وجود دارد. راهنمای حاضر بر اساس آن تنظیم شده است که کتاب درسی محور اصلی در فرایند آموزش باشد. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌گو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

اهداف هر فصل و اهداف هر درس در کتاب حاضر توضیح داده شده است. همچنین در روش تدریس ارائه شده برای هر درس، نحوه اجرای هر فعالیت و چالش‌های پیش رو، پیشنهادهایی برای غنی‌سازی هر فعالیت، بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان در آن فعالیت و نیز توصیه‌هایی برای ارزشیابی نیز ارائه شده است. علاوه بر این در مورد پاسخ بیشتر فعالیت‌ها و تمرینات، راهنمایی به عمل آمده است. در کنار این بحث‌هایی نیز به عنوان دانستنی‌هایی برای معلم و همچنین نمونه سؤال‌هایی برای ارزشیابی ارائه شده است.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس باشند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد دربارهٔ یک مفهوم، حدود و ثغوری در کتاب مشخص شده است. رعایت این حد و مرزها، در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی الزامی است. روند کتاب نشان می‌دهد که حتی ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که سال‌ها به‌صورت سنتی ارائه شده‌اند.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای آن در زندگی واقعی، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است امید است که این موضوع مد نظر معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفادهٔ افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درسی را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان

فصل اول

آشنایی با نظریهٔ اعداد

نگاه کلی به فصل

فصل ۱ کتاب ریاضیات گسسته، به مبحث استدلال و نظریه اعداد اختصاص یافته است. این فصل شامل سه درس است. موضوع درس اول در مورد استدلال ریاضی می‌باشد و روش‌های استدلال و اثبات ریاضی شامل اثبات مستقیم، مثال نقض، اثبات غیرمستقیم، اثبات بازگشتی، همراه با سؤالات متنوع مطرح شده است. در درس دوم به موضوع بخش‌پذیری در اعداد صحیح که شامل معرفی رابطه عاد کردن و ویژگی‌های آن، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، قضیه تقسیم و کاربردهای آن، افراز مجموعه Z به کمک قضیه تقسیم و مسائل مختلف مربوط به آنها پرداخته شده است. در درس سوم، مبحث هم نهشتی در اعداد صحیح مطرح می‌گردد که شامل معرفی رابطه هم‌نهشتی و ویژگی‌های آن و برخی کاربردهای هم نهشتی مثل تعیین باقی‌مانده تقسیم و تقویم نگاری است. سپس معادله هم‌نهشتی و معادله سیاله خطی معرفی می‌شوند و شرط وجود جواب آنها بیان می‌گردد. حل معادله سیاله خطی از طریق تبدیل آن به معادله هم‌نهشتی، همراه با مثال‌هایی آموزش داده می‌شود. همچنین کاربرد معادله سیاله خطی در حل برخی از مسائل عینی و مرتبط با زندگی روزمره مطرح شده است.

درس اول

استدلال ریاضی

روش تدریس

در مثال ص ۹ دانش‌آموزان با دو نوع استدلال، یعنی «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» آشنا می‌شوند. همکاران محترم می‌توانند این مثال را بدون رجوع دانش‌آموزان به کتاب، در کلاس درس مطرح نمایند و در صورت امکان یک گفت‌وگو و بحث ریاضی را شکل دهند و به کمک دانش‌آموزان بحث را هدایت نمایند. البته با توجه به سطح کلاس امکان طرح مثال غنی‌تر هم وجود دارد. بخشی از مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان حین بحث و گفت‌وگو قابل برطرف شدن است. همچنین مسئله‌هایی که در کار در کلاس ارائه شده‌اند نیز برای بحث و گفت‌وگو مناسب هستند.

کار در کلاس ص ۳

قسمت‌های الف)، پ)، ث) و چ) به روش «اثبات مستقیم» و بقیه موارد به کمک ارائه «مثال نقض» قابل حل هستند.

حل قسمت چ کار در کلاس ص ۳

$$4k+1=a^2 \Rightarrow 4k=a^2-1 \Rightarrow k=\frac{a^2-1}{4}=(\frac{a+1}{2})(\frac{a-1}{2})$$

چون $4k+1$ عددی فرد است پس a^2 نیز عددی فرد است و در نتیجه a نیز فرد است. بنابراین $a+1$ و $a-1$ هر دو زوج هستند و در نتیجه $\frac{a+1}{2}$ و $\frac{a-1}{2}$ اعدادی طبیعی هستند. اختلاف این دو عدد برابر واحد است :

$$\frac{a+1}{2}-\frac{a-1}{2}=\frac{a+1-a+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

هم‌ارزی $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge ... \wedge (p_n \Rightarrow r)$ نشان می‌دهد که چرا برای اثبات درستی $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n \Rightarrow r$ باید هر حالت را جداگانه بررسی کرد. مثال‌های مناسب دیگر مواردی مانند، گویا یا گنگ بودن، مثبت یا منفی بودن، بزرگ‌تری یا کوچک‌تری و نظایر آن را شامل می‌شوند. همکاران عزیز توجه دارند که هدف آشنایی با این نوع استدلال است و طرح مباحث دشوار که نیاز به تکنیک‌ها و قواعد و یا محاسبات پیچیده دارند مورد تأیید مؤلفین کتاب حاضر نمی‌باشد. ضمناً با ارائه فرصت به دانش‌آموزان برای ارائه راه‌حل‌هایشان ممکن است پاسخ‌های متفاوت و در شرایطی بهتر از آنچه که در این کتاب ارائه شده‌اند، به‌دست آید.

کار در کلاس ص ۵

الف) اگر ab عددی فرد باشد، باید هر دو a و b فرد باشند :

$$a = 2m+1 \quad , \quad b = 2n+1$$

$$a^2 = 4m^2 + 4m + 1 \quad , \quad b^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$a^2 + b^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4m + 4n + 2$$

که عددی زوج است.

ب) اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، با توجه به اینکه : $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ بنابراین $\frac{n(n+1)}{2}$ هم باید زوج باشد و در نتیجه $n(n+1) = 4k$

$$n = 1 \Rightarrow n(n+1) = 1 \times 2$$

$$n = 2 \Rightarrow n(n+1) = 2 \times 3$$

$$n = 3 \Rightarrow n(n+1) = 3 \times 4$$

$$n = 4 \Rightarrow n(n+1) = 4 \times 5$$

$$n = 5 \Rightarrow n(n+1) = 5 \times 6$$

$$n = 6 \Rightarrow n(n+1) = 6 \times 7$$

با بررسی پاسخ‌ها مشخص است که $n = 3$ و $n = 4$ تنها پاسخ‌های قابل قبول هستند.

اثبات غیر مستقیم / اثبات به روش برهان خلف

مطالعات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان گاهی اثبات‌ها را حفظ می‌کنند و با آنکه به ظاهر توانایی ارائه آن را دارند، اما از توضیح برخی ایده‌های اساسی در یک اثبات ناتوان هستند. برای درک برهان خلف شایسته است ایده منطقی که در ورای آن قرار دارد برای دانش‌آموز تشریح شود. در هر حال همان‌گونه که پولیا می‌گوید «این‌گونه برهان مخالفانی نیز دارد و به‌طور خلاصه گفته می‌شود که با گوش دادن به چنین برهانی، ناگزیر باید در تمام مدت توجه خود را به فرض غلطی معطوف داریم که لازم است آن را فراموش کنیم، نه به قضیه راستی که باید آن را در خاطر نگاه داریم». در هر حال از نظر پولیا برای داوری در مورد چنین اعتراضاتی باید میان دو کاربرد برهان خلف، یکی به عنوان افزار پژوهش و دیگری به عنوان وسیله بیان و عرضه کردن تمایز قائل شویم.

حل کار در کلاس ص ۶

الف) فرض کنیم x یک عدد گنگ باشد، ولی (فرض خلف) $\frac{۱}{x}$ عددی گویا باشد. واضح است که $x \neq ۰$. با توجه به آنچه در مثال آخر ص ۵ آمده است، حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است، بنابراین حاصل $x \cdot \frac{۱}{x}$ باید عددی گنگ باشد در حالی‌که $x \cdot \frac{۱}{x} = ۱$ که یک تناقض است.

ب) فرض کنیم تابع f در a پیوسته باشد ولی تابع g در a پیوسته نباشد. فرض کنیم $f+g$ (فرض خلف) در $x=a$ پیوسته است، بنابراین $f+g-f$ هم در $x=a$ پیوسته است، یعنی g در $x=a$ پیوسته است که یک تناقض است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اثبات به کمک گزاره‌های هم‌ارز یکی از روش‌های نیرومند در استدلال ریاضی است. در حقیقت بخش مهمی از کار به توانایی ارائه گزاره‌ای هم‌ارز با گزاره‌ای که باید اثبات شود ــ و البته گزاره‌ای که بررسی درستی یا نادرستی آن ساده‌تر از گزاره اصلی باشد ــ اختصاص دارد. تأکید می‌گردد که سطح سؤالات مطرح شده در آزمون‌ها باید در محدوده و سطح سؤالات کتاب باشد.

حل کار در کلاس ص ۷

الف) گزاره‌های $a<b$ و $a^۲<b^۲$ هم‌ارز نیستند. بنابراین ترکیب دو شرطی $a<b \Leftrightarrow a^۲<b^۲$ درست

نیست.

ب) دو گزاره $a<b$ و $a^3<b^3$ هم‌ارز هستند و هر یک دیگری را نتیجه می‌دهد. بنابراین $a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$ یک ترکیب دو شرطی درست است.

حل کار در کلاس ص ۸

الف) اگر $n \in \mathbb{N}$ همان‌گونه که قبلاً دیده‌اید می‌توان ثابت کرد:

n زوج است $\Leftrightarrow$ n^2 زوج است

بنابراین این دو گزاره معادل هم هستند.

حل تمرینات درس اول ص ۸

۱ الف) اگر x و y هم علامت باشند و $x,y \neq 0$ داریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

همواره برقرار است.

ب)
$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2zx$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy+y^2+z^2-2yz+x^2+z^2-2zx \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$$

همواره برقرار است.

برای اثبات رابطه $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$ کافی است در قسمت قبل به‌جای z، عدد ۱ قرار دهیم. البته به‌طور مستقل و شبیه روش بالا نیز می‌توان عمل کرد.

۲ $x=\frac{1}{2}$ یک پاسخ است. مسئله چند جواب دارد؟

۳ فرض کنیم که α و β دو عدد گنگ و $\alpha+\beta$ گویا باشد، اما $\alpha-\beta$ گویا نباشد (فرض خلف) بنابراین $(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)$ هم گویاست، یعنی 2α گویاست و از آنجا α گویا خواهد بود که یک تناقض است.

۴ فرض کنیم چنین اعدادی یافت شوند. پس $x^2+y^2=(x+y)^2$

$$\Rightarrow x^2+y^2=x^2+y^2+2xy \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } y=0$$

اگر $x=0$، آن‌گاه y می‌تواند عددی صحیح و دلخواه باشد.

اگر $y=0$، آن‌گاه x می‌تواند عددی صحیح و دلخواه باشد.

۵ فرض کنیم b و a نا صفری موجود باشند که $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}(a+b\neq 0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab}\Rightarrow (a+b)^2=ab\Rightarrow a^2+2ab+b^2=ab$$

$$\Rightarrow a^2-ab+b^2=0\Rightarrow (a-\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}=0\Rightarrow \begin{cases}(a-\frac{b}{2})^2=0\\ \frac{3b^2}{4}=0\Rightarrow b=0\end{cases}$$

$$(a-\frac{b}{2})^2=0\overset{b=0}{\Rightarrow} a^2=0\Rightarrow a=0$$

پس $a=0$ و $b=0$ که تناقض با فرض ناصفر بودن a و b دارد.

۶ الف) فرد $x=2k+1\Rightarrow x^2=4k^2+4k+1$

$$x^3=(2k+1)^3=8k^3+3(2k)^2+3(2k)^2+1$$
$$=8k^3+12k^2+6k+1$$

ب) اعداد مذکور را $n+2$, $n+1$, n , $n-1$ و $n-2$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)}{5}=\frac{5n}{5}=n$$

نمونه‌سؤال‌های ارزشیابی

۱ برای هر دوعدد حقیقی a و b با شرط $a+b>0$ ثابت کنید :

$$a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$$

۲ ثابت کنید برای هر عدد حقیقی a داریم :

$$\frac{a^2}{1+a^4}\leq\frac{1}{2}$$

۳ ثابت کنید هر عدد ۶ رقمی به‌صورت $\overline{abc\,abc}$ بر اعداد ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است.

۴ اگر $a>0$ و $b>0$ و $a+b=1$ ثابت کنید $-ab\leq\frac{1}{4}$

۵ ثابت کنید تابعی چون f موجود است که $f=f^{-1}$.

۶ ثابت کنید عدد اولی چون p موجود است که $vp+1$ مکعب کامل باشد.

۷ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است، دلیل بیاورید :

الف) اگر $A \subseteq B$ و $x \notin B$ آن‌گاه $x \notin A$

ب) اگر $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq C$ آن‌گاه $A \not\subseteq C$

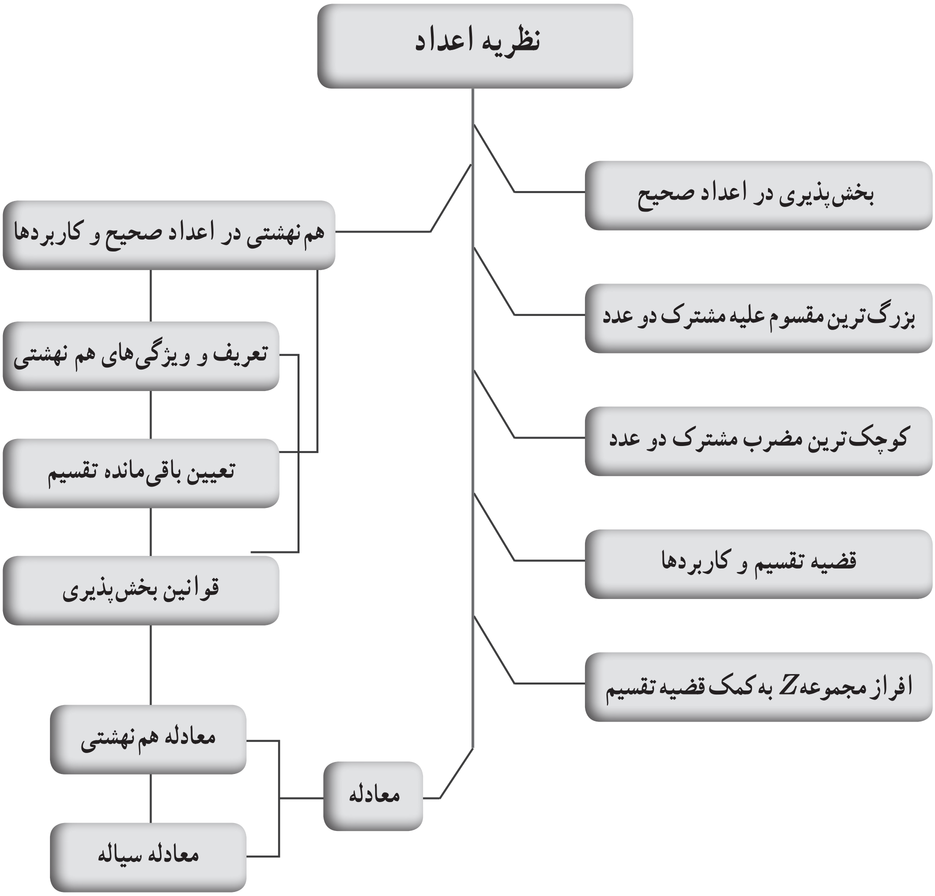
ج) اگر $x \in A$ و $A \in B$ آن‌گاه $x \in B$

۸ ثابت کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است.

۹ اگر m یک عدد مثبت باشد ثابت کنید : $m + \frac{۴}{m^{۲}} \geq ۳$

۱۰ ثابت کنید بین هر دو عدد گویای متمایز، عددی گنگ موجود است.

نقشه مفهومی درس‌های ۲ و ۳ فصل اول



درس دوم

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

اهداف

۱ آشنایی و درک مفهوم بخش‌پذیری در اعداد صحیح
۲ آشنایی با رابطه عاد کردن و شناخت ویژگی‌های آن و به کارگیری آن در حل برخی از مسائل
۳ به کارگیری تعریف رابطه عاد کردن برای بیان مفهوم بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد
۴ به کارگیری تعریف رابطه عاد کردن برای بیان مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد
۵ آشنایی با قضیه تقسیم و کاربرد آن در حل برخی از مسائل
۶ به کارگیری قضیه تقسیم برای افراز مجموعه Z

روش تدریس

در شروع درس، به بیانی ساده مفهوم رابطه عاد کردن مطرح شده است و مفهوم بخش‌پذیری برای اعداد طبیعی همراه با مثال مطرح می‌شود. سپس در حالت کلی‌تر، مفهوم بخش‌پذیری به مجموعه اعداد صحیح تعمیم داده شده است.

هدف کاردرکلاس صفحه ۱۰، درک رابطه عاد کردن و استفاده از آن برای حل مسئله است.

حل کاردرکلاس صفحه ۱۰، قسمت ۲

$$۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \xrightarrow{۳^۴ = q} ۳^۹ = ۳^۵ \times q \rightarrow ۳^۵ \mid ۳^۹$$

$$\forall m,n \in N; m \le n \Rightarrow a^n = a^m \times a^{n-m} \xrightarrow{a^{n-m} = q} a^n = a^m \times q \rightarrow a^m \mid a^n$$

سپس ویژگی‌ها و نتایج رابطه عاد کردن همراه با دلایل و اثبات مطرح شده است.

اثبات ویژگی ۱ :

$$a\,|\,b \Rightarrow b = aq \Rightarrow mb = a(mq) \overset{mq=q'}{\Rightarrow} a\,|\,mb$$

پاسخ به سؤالات مربوط به ویژگی ۱ :

پاسخ سؤال اول : خیر، با توجه به مثال‌های مطرح شده، همواره چنین نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

پاسخ سؤال دوم :

$$a\,|\,b \Rightarrow b = aq \overset{\times k}{\Rightarrow} kb = (ka)q \Rightarrow ka\,|\,kb$$

$$ka\,|\,kb \Rightarrow kb = kaq \overset{\div k}{\Rightarrow} b = aq \Rightarrow a\,|\,b$$

تکمیل اثبات ویژگی ۲ :

$$a|b\ ,\ b|c \Rightarrow b = aq_۱\ ,\ c = bq_۲$$

$$\Rightarrow c = (aq_۱)q_۲ \Rightarrow c = a(q_۱q_۲) \overset{q_۱q_۲=q}{\Rightarrow} c = aq \Rightarrow a\,|\,c$$

پاسخ سؤال مربوط به ویژگی ۳ :

خیر، به طور مثال : $۲ \nmid ۷\ ,\ ۲ \nmid ۳ \rightarrow ۲\,|\,۳+۷$

کار در کلاس صفحه ۱۱

قسمت ۱، دلیل درستی رابطه $a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱$:

$$a|۱ \Rightarrow |a| \le ۱ \Rightarrow -۱ \le a \le ۱ \Rightarrow a = -۱ \text{ یا } a = ۰ \text{ یا } a = ۱$$

از طرفی چون $a|۱$ پس $a \neq ۰$، بنابراین : $a = \pm ۱$

قسمت ۲،

$$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \overset{q^n = q'}{\Rightarrow} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$$

در واقع با حل این مسئله ثابت شد اگر $\frac{b}{a}$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه $\frac{b^n}{a^n}$ نیز عددی صحیح است.

قسمت ۳،

$$\left.\begin{aligned} a\,|\,b \Rightarrow b = aq_۱ \\ c\,|\,d \Rightarrow d = cq_۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow b\times d = (a\times c)(q_۱q_۲) \overset{q_۱q_۲=q}{\Rightarrow} b\times d = (a\times c)\times q \Rightarrow ac\,|\,bd$$

قسمت ۴، با استفاده از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ داریم :

$$\left.\begin{aligned} a\,|\,b \Rightarrow a\,|\,mb \\ c\,|\,d \Rightarrow a\,|\,nc \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\pm} a\,|\,mb \pm nc$$

قبل از ورود به مبحث بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، مفهوم اعداد اول برای دانش‌آموزان یادآوری شده است. در واقع اعداد اول به عنوان زیر بنا و سازنده همه اعداد صحیح، نقش بسیار مهم و اساسی ایفا می‌کنند. سپس با استفاده از رابطه عاد کردن، تعریف عدد اول بیان می‌شود و مثالی مطرح شده است.

تکمیل حل مثال :

$$\left.\begin{array}{l} a|7k+6 \Rightarrow a|9\times(7k+6) \Rightarrow a|63k+54 \\ a|9k+7 \Rightarrow a|7\times(9k+7) \Rightarrow a|63k+49 \end{array}\right\} \Rightarrow a|(63k+54)-(63k+49) \Rightarrow a|5 \Rightarrow a=5 \text{ یا } a=1$$

می‌توان برای درک بهتر دانش‌آموزان، مثال دیگری نیز مطرح نمود تا پاسخ دهند.

مثال : اگر a عددی صحیح و دو عدد $(5m+4)$ و $(4m+3)$ را عاد کند، ثابت کنید : $a=\pm 1$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,5m+4 \Rightarrow a\,|\,4\times(5m+4) \Rightarrow a\,|\,20m+16 \\ a\,|\,4m+3 \Rightarrow a\,|\,5\times(4m+3) \Rightarrow a\,|\,20m+15 \end{array}\right\} \Rightarrow a\,|\,(20m+16)-(20m+15) \Rightarrow a\,|\,1 \Rightarrow a=\pm 1$$

در شروع این درس مفهوم مقسوم علیه‌های یک عدد با توجه به رابطه عاد کردن تعریف شد، وقتی $a|b$، a یک مقسوم علیه b است. با توجه به این تعریف، مفاهیم بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد معرفی می‌شوند.

ممکن است برای دانش آموزی سؤال شود که در تعریف ب م م، چرا a و b هر دو با هم صفر نیستند؟

اگر a و b هر دو را با هم صفر در نظر بگیریم، پس باید ب م م صفر و صفر را حساب کنیم. فرض کنیم $d=(0,0)$، طبق تعریف داریم : $d|0$ و $d|0$، ولی d باید بزرگ‌ترین عددی باشد که صفر را عاد می‌کند. که چنین عددی را نمی‌توان یافت. چون همه اعداد صفر را عاد می‌کنند و بین آنها بزرگ‌ترینی وجود ندارد.

در صفحه ۱۳ ، بعد از تعریف کوچک‌ترین مضرب مشترک، سؤال شده که توضیح دهید هر یک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

شرط (الف) مضرب مشترک بودن را برای c تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که c از هر مضرب مشترک دلخواهی چون m، کوچک‌تر یا مساوی است.

هدف از کاردرکلاس صفحه ۱۳، درک بهتر دانش آموزان از مفاهیم ب م م و ک م م و به کارگیری از این مفاهیم برای اثبات برخی قضیه‌ها و حل مسائل است.

۱ــ

اثبات الف :

$$a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$$

با توجه به دو شرط موجود در تعریف ب م م داریم :

$$|a|\,|a \xrightarrow{a|b} |a|\,|b$$
$$\forall m>\circ\,;\; m\,|\,a, m\,|\,b \Rightarrow m\,|\,a \Rightarrow |m| \leq |a| \Rightarrow m \leq |a|$$

اثبات ب :

$$a|\,b \Rightarrow [a,b]=|b|$$

با توجه به دو شرط موجود در تعریف ک م م داریم :

$$b\,\Big|\,|b| \xrightarrow{a|b} a\,\Big|\,|b|$$
$$\forall m>\circ\,;\; a\,|\,m, b\,|\,m \Rightarrow b\,|\,m \Rightarrow |b| \leq |m| \Rightarrow |b| \leq m$$

۲ــ در این قسمت، منظور از قضیه مطرح شده این است که عدد اول p نسبت به هر عددی که مضرب p نباشد، اول است.

$$(p\,,\,a)=\mathrm{d} \;\begin{cases} d\,|\,p \xrightarrow{\text{اول}\,p} d=۱ \text{ یا } d=p \\ \mathrm{d}\,|\,\mathrm{a} \qquad (۱) \end{cases}$$

اگر $d=p$ باشد، در این صورت، با توجه به (۱) باید p|a (به جای d قرار می‌دهیم p) که با فرض $(p \nmid a)$ تناقض دارد، پس باید $d=۱$.

نتیجه‌ای که می‌توان از این قضیه گرفت این است که : اگر بزرگ‌ترین شمارنده دو عدد صحیح a و b برابر یک باشد، آن دو عدد نسبت به هم اول هستند. $(a\,,\,b)=d=۱$

در صفحه ۱۴، بحث تقسیم پذیری در Z، در حالت کلی مطرح می‌شود و با بیان قضیه‌ای به نام قضیه تقسیم، که از مهم‌ترین قضیه‌های نظریه اعداد به شمار می‌رود، حالت‌هایی را که در تقسیم a بر b، باقی‌مانده صفر نباشد، را در نظر می‌گیریم.

در حالت کلی‌تر می‌توان قضیه تقسیم را به این صورت بیان نمود که، اگر a و b اعداد صحیح باشند و $b\neq\circ$، اعداد صحیح و منحصر به فرد q و r وجود دارند به طوری که : $a=bq+r\,,\,\circ\leq r<|b|$.

واضح است که اگر $r=\circ$ باشد، $a=bq$ بوده، آنگاه a بر b بخش‌پذیر است.

در ادامه برای درک مفهوم قضیه تقسیم و کاربرد آن در حل مسائل تقسیم‌پذیری، مثال‌هایی مطرح شده است.

در مثال اول صفحه ۱۴، که هدف آن تعیین باقی‌مانده تقسیم عدد ۲۵− بر ۷ می‌باشد، به عبارتی از تساوی ۴ + (۳ × ۷)=۲۵ استفاده شده است، که طرفین این تساوی در عدد (۱−) ضرب و به صورت ۴−(۳−) × ۷ = ۲۵− نوشته می‌شود. به دانش آموزان تأکید شود که علامت منفی در کنار عدد ۷ قرار

نمی‌گیرد، چون می‌خواهیم باقی مانده تقسیم عدد (۲۵−) را بر ۷ به دست آوریم. سپس در کتاب با توجه به شرایط قضیه تقسیم، باقی‌مانده را که باید عددی نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم علیه باشد را به‌دست آورده است.

در صفحه ۱۵، مبحث افراز مجموعه Z به کمک قضیه تقسیم بیان شده است. دانش‌آموزان در پایه یازدهم، در کتاب آمار و احتمال، با مفهوم افراز یک مجموعه آشنا شدند. بهتر است مفهوم افراز در کلاس برای دانش‌آموزان یادآوری گردد.

فرض کنیم $A \neq \varnothing$ یک مجموعه و $A_۱$, $A_۲$, . . . و A_n زیرمجموعه‌های A باشند. مجموعه A به n زیرمجموعه $A_۱$, $A_۲$, . . . و A_n افراز شده است، هر گاه سه شرط زیر را هم زمان داشته باشد :

۱) هیچ یک از زیرمجموعه‌ها تهی نباشد. یعنی : $\forall ۱ \leq i \leq n;\ \ A_i = \varnothing$

۲) اشتراک هر دو زیرمجموعه متمایز، تهی باشد. یعنی : $\forall i, j \quad (i \neq j);\ \ A_i \cap A_j = \varnothing$

۳) اجتماع تمام زیرمجموعه‌ها با مجموعه اصلی برابر باشد. یعنی : $\bigcup\limits_{i=۱}^{n} A_i = A$

سپس مسئله‌های حل شده در کتاب مورد بررسی قرار گیرند.

در مسئله ۳ صفحه ۱۵، می‌خواهیم ثابت کنیم که هر عدد صحیح و فرد، به یکی از دو صورت $۴k+۱$ و $۴k+۳$ نوشته می‌شود. این مطلب ممکن است برای دانش‌آموزان سؤال برانگیز باشد، چون هر عدد فرد را به صورت $۲k+۱$ نشان می‌دادند. می‌توان با مثالی به آنها نشان داد که بعضی $۲k+۱$ها به صورت $۴k+۱$ و بعضی به صورت $۴k+۳$ هستند. به طور مثال، عدد ۹ را می‌توان به صورت ۱+۲×۴ نوشت که همان $۴k+۱$ است و عدد ۷ را می‌توان به صورت۳+۱×۴ نوشت که همان $۴k+۳$ است.

توصیه آموزشی

❑ به دانش آموزان تأکید شود برای اینکه مسائل مربوط به نظریه اعداد برایشان ساده و آسان شود، با دقت تعاریف و اثبات ویژگی‌های مفاهیم مطرح شده در کتاب را یاد بگیرند.

❑ بعضی مطالب که پیش‌نیاز مطالب جدید است و در کتاب یادآوری شده، با روش پرسش و پاسخ در کلاس مطرح شود تا دانش‌آموزان از آموخته‌های قبلی خود برای مبحث جدید استفاده کنند و ارتباط مفهومی بین مفاهیم ریاضی را به خوبی درک نمایند و یادگیری معنادار صورت گیرد. به عنوان مثال، قبل از ورود به مبحث افراز مجموعه Z، از دانش آموزان پرسیده شود : آیا مجموعه اعداد فرد طبیعی و اعداد زوج طبیعی، افرازی برای مجموعه N هستند؟ برای W چطور؟ چرا؟ با طرح این‌گونه سؤالات، هم مفهوم افراز برای دانش‌آموزان یادآوری می‌شود و هم برای درک بهتر و ایجاد مهارت در حل مسئله به آنها کمک می‌کند.

❑ به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل پیچیده و دشوار اجتناب گردد.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

معمولاً دانش‌آموزی که به تعاریف دقت نمی‌کند و خواص و ویژگی‌های مفهوم مطرح شده در درس را بدون دلایل و اثبات به ذهن می‌سپارد، در حل مسائل نظریه اعداد دچار مشکل و اشتباه می‌شود.

مثلاً به اشتباه فکر می‌کند وقتی حکمی برقرار است، پس عکس آن حکم نیز برقرار است و عکس آن حکم را بدون بررسی و اطمینان از درستی آن، در حل مسئله‌ها به کار می‌برد.

همچنین، به این نکته توجه ندارد که در بعضی از حکم‌ها اگر عدد مرکب باشد یا اول باشد، تفاوتی وجود دارد. به عنوان نمونه :

❑ اگر a و b اعداد صحیح باشند، از $a|b^n$ که $(n \in N)$ ، نتیجه می‌گیرد : $a|b$. در حالی که این نتیجه‌گیری همواره درست نیست. به عنوان مثال، از $9|3^3$ نمی توان نتیجه گرفت که $9|3$. ولی اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت که : $p|a^n \Leftrightarrow p|a$.

❑ اگر a و b و c اعداد صحیح باشند، از $a|bc$ نتیجه می‌گیرد : $a|b$ یا $a|c$. که این حکم همواره درست نیست. همان‌طور که در کتاب مثال‌هایی ارائه شد، مثلاً اگر $6 | 3 \times 4$، ولی $6 \nmid 3$ یا $6 \nmid 4$. حال اگر p عددی اول باشد، می‌توان نتیجه گرفت که : $p|ab \Rightarrow p|a$ یا $p|b$.

❑ اگر a و b اعداد صحیح باشند، از $a \nmid b$ ، نتیجه می‌گیرد که $(a,b) = 1$. که این حکم همواره برقرار نیست. مثلاً : عدد ۱۸، عدد ۶ را عاد نمی‌کند، ولی ۶ و ۱۸ نسبت به هم اول نیستند. حال اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت که : $p \nmid a \Leftrightarrow (p,a) = 1$.

دانستنی‌های معلم

نظریه اعداد یکی از شاخه‌های جالب و با اهمیت ریاضیات می‌باشد که توانسته توجه بشر را برای هزاران سال به خود جلب کند. در این شاخه از ریاضیات، به مسائل، قضایا و برهان‌هایی برمی‌خوریم که قدمت بسیار طولانی دارند و پیشینه تاریخی آنها به روزگاران بسیار دور بر می‌گردد. تالس به عنوان نخستین کسی که برای احکامی از ریاضیات استدلال منطقی ارائه کرده است، شناخته می‌شود. پس از تالس، فیثاغورس و شاگردانش تلاش کردند که خواص اعداد را مورد مطالعه قرار دهند. پس از ایشان، اقلیدس در کتاب «اصول» گرد آیه‌ای منسجم از احکام ریاضی با اثبات‌های منطقی شامل علم حساب را تألیف کرد. بخشی از آموزه‌های امروزی علم حساب از جمله مباحث بخش‌پذیری، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و نحوهٔ محاسبهٔ آن، اعداد اول، قضیهٔ بنیادی حساب ونامتناهی بودن اعداد اول در کتاب اصول یافت می‌شوند. امروزه نظریه اعداد، آن‌چنان وسعت یافته که تقریباً در تمام شاخه‌های ریاضی رخنه کرده است و حتی

توانسته در علوم غیر ریاضی همچون کامپیوتر، کاربرد داشته باشد. اگر بخواهیم در حالت کلی این علم را تعریف کنیم، باید بگوییم نظریه اعداد، شاخه‌ای از ریاضیات است که ویژگی‌های اعداد صحیح در آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نظریه هم‌نهشتی یا حساب پیمانه‌ای یکی از شاخه‌های مهم نظریه اعداد است و این شاخه در واقع ابزار بسیار قدرتمندی برای محاسبات مختلف می‌باشد. در اوایل قرن نوزدهم کارل فردریش گاوس، ریاضیدان بزرگ آلمانی، با بیان هم نهشتی‌ها توانست راهگشا و حل‌کننده بسیاری از مشکلات و مسائل نظریه اعداد باشد. هم‌نهشتی‌ها کاربردهای بسیاری در دانش کامپیوتر، از جمله حساب با اعداد صحیح بزرگ و رمزنگاری دارند. مفهوم هم نهشتی در موارد بسیاری در زندگی ما مشهود است.

می‌دانیم، بسیاری از مسئله‌های جبر به معادله‌هایی می‌انجامد که تعداد مجهول‌های مسئله، بیش از تعداد معادله‌های مربوط به آن است. در واقع معادله‌ای چند جمله‌ای با متغیرهای صحیح، که در آن بیش از یک متغیر وجود دارد، معادله سیاله نامیده می‌شود. از لحاظ تاریخی، این‌گونه معادله‌ها از زمان ریاضیدان یونانی دیوفانت که در قرن سوم بعد از میلاد می‌زیسته، مطرح بوده‌اند و به همین مناسبت به آنها «معادله‌های دیوفانتی» نیز می‌گویند.

حل تمرینات درس دوم صفحه ۱۶ کتاب

۱

$$ab|cd \quad , \quad a|cd \quad , \quad b|cd \quad , \quad c|ab \quad ,d|ab$$

۲

$$a\,|\,b \Rightarrow b = aq \Rightarrow (-b) = a(-q) \overset{-q=q'}{\Rightarrow} a\,|\,-b$$

$$a\,|\,b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b = (-a)(-q) \overset{-q=q'}{\Rightarrow} -a\,|\,b$$

$$a\,|\,b \Rightarrow b = aq \Rightarrow -b = -aq \Rightarrow -a\,|\,-b$$

۳

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,5k+3 \Rightarrow a\,|\,9\times(5k+3) \Rightarrow a\,|\,45k+27 \\ a\,|\,9k+4 \Rightarrow a\,|\,5\times(9k+4) \Rightarrow a\,|\,45k+20 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a\,|\,(45k+27)-(45k+20) \Rightarrow a\,|\,7 \overset{a>1}{\Rightarrow} a = 7$$

پس a عددی اول است.

۴

$$\left.\begin{array}{l} 5\,|\,۴k+۱ \xrightarrow{a|b\to a^n|b^n} ۲۵\,|\,۱۶k^۲+۸k+۱ \\ \qquad\quad \xrightarrow{a|b\to ma|mb} ۲۵\,|\,۲۰k+۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{a|b,a|c\to a|b+c} ۲۵\,|\,۱۶k^۲+۲۸k+۶$$

۵

خیر، به عنوان مثال : $۲|۴\ ,\ ۳|۹ \to ۲+۳ \nmid ۴+۹$

۶

الف)

$$m\in Z\ ,\ (m,m+۱)=d \Rightarrow d\,|\,m+۱\ ,d\,|\,m \Rightarrow d\,|\,(m+۱)-m \Rightarrow d\,|\,۱ \overset{d>0}{\Rightarrow} d=۱$$

ب)

$$m\in Z\ ,\ (۲m+۱,۲m+۳)=d \Rightarrow d\,|\,۲m+۳\ ,\ d\,|\,۲m+۱ \Rightarrow d\,|\,(۲m+۳)-(۲m+۱) \Rightarrow d\,|\,۲$$

$$\overset{d>0}{\Rightarrow}\begin{cases} d=۱ & \text{قابل قبول} \\ d=۲ & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

چون هر دو عدد فردند، پس $d=۱$ قابل قبول است.

۷

اثبات به برهان خلف :

فرض کنیم $d=(p,q)$ و $d\neq ۱$، داریم :

$$d\,|\,p\ ,\ d\,|\,q \overset{d\neq ۱}{\Rightarrow} d=p\ ,\ d=q \Rightarrow p=q$$

که با فرض مسئله $(p\neq q)$ در تناقض است. پس : $d=۱$

۸

$$m\leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$$

$$a|b \Rightarrow a^m|b^m \Rightarrow a^m|b^{n-m}\times b^m \Rightarrow a^m|b^n$$

۹

$$\left.\begin{array}{l} a=۷q+۵ \Rightarrow ۸a=۸\times(۷q+۵) \Rightarrow ۸a=۵۶q+۴۰ \\ a=۸q'+۷ \Rightarrow ۷a=۷\times(۸q'+۷) \Rightarrow ۷a=۵۶q'+۴۹ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۸a-۷a=(۵۶q+۴۰)-(۵۶q'+۴۹)$$

$$\Rightarrow a=۵۶q-۵۶q'-۹=۵۶q-۵۶q'-۵۶+۵۶-۹=$$

$$۵۶(\underbrace{q-q'-۱}_{q''})+۴۷=۵۶q''+۴۷ \Rightarrow r=۴۷$$

۱۰

$a\in Z\ ,\ k\in Z\ ,\ a=۲k+۱, b|a+۲ \Rightarrow b|۲k+۳$

پس b عددی فرد است، بنابراین : $k'\in Z\ ,\ b=۲k'+۱$

$a^۲+b^۲+۳=(۲k+۱)^۲+(۲k'+۱)^۲+۳=۴k^۲+۴k+۱+۴k'^۲+۴k'+۱+۳$

می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی بر ۲ تقسیم پذیر است یعنی حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، عددی زوج خواهد بود و داریم :

$$=۴\underbrace{k(k+۱)}_{۲n}+۴\underbrace{k'(k'+۱)}_{۲n'}+۵=۸n+۸n'+۵=۸\underbrace{(n+n')}_{n''}+۵=۸n''+۵\Rightarrow r=۵$$

۱۱ برای اثبات اینکه $۳|n^۳-n$، n را به سه صورت می‌توان نوشت :

۱) $n=۳k\Rightarrow ۳|n\Rightarrow ۳|n(n^۲-۱)\Rightarrow ۳|n^۳-n$

۲) $n=۳k+۱\Rightarrow n-۱=۳k\Rightarrow ۳|(n-۱)\Rightarrow ۳|(n-۱)(n+۱)n\Rightarrow ۳|n^۳-n$

۳) $n=۳k+۲\Rightarrow n+۱=۳k+۳=۳\underbrace{(k+۱)}_{k'}\Rightarrow ۳|(n+۱)\Rightarrow ۳|(n+۱)(n-۱)n\Rightarrow ۳|n^۳-n$

۱۲ طبق فرض برای $a=bq+r$ داریم : $n|a$ و $n|b$ ، پس :

$$\left.\begin{array}{l} n|a \\ n|b\Rightarrow n|bq \end{array}\right\}\Rightarrow n|a-bq\Rightarrow n|r$$

۱۳ اگر a عددی صحیح باشد، می‌توان آن را به یکی از حالت‌های $a=۳k$ یا $a=۳k+۱$ یا $a=۳k+۲$ نوشت:

$a=۳k\Rightarrow ۳|a$

$$a=۳k+۱\Rightarrow a+۲=۳k+۳=۳\underbrace{(k+۱)}_{k_۱}\Rightarrow ۳|a+۲$$

$$a=۳k+۲\Rightarrow a+۴=۳k+۶=۳\underbrace{(k+۲)}_{k_۲}\Rightarrow ۳|a+۴$$

پس همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴

$$k\in Z, (k+۱)^۳-k^۳=k^۳+۳k^۲+۳k+۱-k^۳=۳\underbrace{k(k+۱)}_{۲n}+۱=۲\underbrace{(۳n)}_{n'}+۱=۲n'+۱$$

۱۵ هر عدد صحیح a را می‌توان به یکی از حالت‌های $a=6k$ یا $a=6k+1$ یا $a=6k+2$ یا $a=6k+3$ یا $a=6k+4$ یا $a=6k+5$ نوشت. اگر سه عدد صحیح متوالی را به صورت $a+2$ و $a+1$ و a در نظر بگیریم:

$$a(a+1)(a+2)\xrightarrow{a=6k}6\underbrace{k(6k+1)(6k+2)}_{k_1}=6k_1\Rightarrow 6\mid a(a+1)(a+2)$$

$$a(a+1)(a+2)\xrightarrow{a=6k+1}(6k+1)\underbrace{(6k+2)}_{2(3k+1)}\underbrace{(6k+3)}_{3(2k+1)}$$

$$=6\underbrace{(6k+1)(3k+1)(2k+1)}_{k_2}=6k_2\Rightarrow 6\mid a(a+1)(a+2)$$

$$a(a+1)(a+2)\xrightarrow{a=6k+2}(6k+2)\underbrace{(6k+3)}_{3(2k+1)}\underbrace{(6k+4)}_{2(3k+2)}$$

$$=6\underbrace{(6k+2)(2k+1)(3k+2)}_{k_3}=6k_3\Rightarrow 6\mid a(a+1)(a+2)$$

$$a(a+1)(a+2)\xrightarrow{a=6k+3}\underbrace{(6k+3)}_{3(2k+1)}\underbrace{(6k+4)}_{2(3k+2)}(6k+5)$$

$$=6\underbrace{(2k+1)(3k+2)(6k+5)}_{k_4}=6k_4\Rightarrow 6\mid a(a+1)(a+2)$$

$$a(a+1)(a+2)\xrightarrow{a=6k+4}(6k+4)(6k+5)\underbrace{(6k+6)}_{6(k+1)}$$

$$=6\underbrace{(6k+4)(6k+5)(k+1)}_{k_5}=6k_5\Rightarrow 6\mid a(a+1)(a+2)$$

$$a(a+1)(a+2)\xrightarrow{a=6k+5}(6k+5)\underbrace{(6k+6)}_{6(k+1)}(6k+7)$$

$$=6\underbrace{(6k+5)(k+1)(6k+7)}_{k_6}=6k_6\Rightarrow 6\mid a(a+1)(a+2)$$

۱۶

الف) $\left([m^2,m],m^5\right)$

$$(\underbrace{[m^2,m]}_{m^2},m^5)=(m^2,m^5)=m^2$$

ب) $(۲m, ۶m^{۳})$

$(۲m, ۶m^{۳})=۲|m|$

پ) $(۳m+۱, ۳m+۲)$

$(۳m+۱, ۳m+۲)=۱$

ب م م دو عدد صحیح متوالی برابر یک است.

ت) $[m^{۷}, (m^{۲}, m^{۳})]$

$$[m^{۷}, \underbrace{(m^{۲}, m^{۳})}_{m^{۲}}] = [m^{۷}, m^{۲}] = |m^{۷}|$$

ث) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]$

$$[\underbrace{(۷۲, ۴۸)}_{۲۴},۱۲۰] = [۲۴,۱۲۰] = ۱۲۰$$

درس سوم

هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

اهداف

۱ آشنایی و درک مفهوم هم‌نهشتی در اعداد صحیح
۲ شناخت ویژگی‌های هم‌نهشتی و قوانین بخش‌پذیری
۳ به‌کارگیری خواص هم‌نهشتی برای یافتن باقیمانده تقسیم اعداد تواندار و بزرگ بر اعداد طبیعی
۴ به‌کارگیری خواص هم‌نهشتی در تقویم نگاری و محاسبه روزهای هفته بر حسب تاریخ داده شده
۵ آشنایی با معادله هم‌نهشتی و حل آن
۶ تشخیص معادله سیاله خطی و تبدیل آن به معادله هم‌نهشتی
۷ درک وجود یا عدم وجود جواب در معادله هم‌نهشتی و معادله سیاله خطی
۸ مهارت در حل معادله هم‌نهشتی و حل معادله سیاله خطی و یافتن جواب‌های عمومی آنها
۹ به‌کارگیری معادله سیاله خطی در حل مسئله‌های کاربردی و مرتبط با زندگی روزمره

روش تدریس

برای ورود به موضوع هم‌نهشتی، درس با فعالیتی آغاز شده است، که با استفاده از مفهوم افراز و مفهوم بخش‌پذیری، مفهوم هم‌نهشتی را نتیجه می‌دهد.

پاسخ فعالیت صفحه ۱۸

۱ بله، به عنوان مثال : $-۸=-۴-(۴)$ و -۸ مضرب ۴ است.

۲ بله، به عنوان مثال : $۲۰=۲۱-۱$ و ۲۰ مضرب ۴ است.

۳ $$a,b\in A_۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۴k_۱+۱ \\ b=۴k_۲+۱ \end{cases} \Rightarrow a-b=(۴k_۱+۱)-(۴k_۲+۱)=۴\underbrace{(k_۱-k_۲)}_{k_۳} \Rightarrow ۴\mid a-b$$

۴ بله ــ تفاضل دو عضو دلخواه از مجموعه A_3، مضرب ۴ می‌باشد.

سپس با نتیجه‌گیری از این فعالیت، رابطه هم‌نهشتی تعریف شده است. همان‌طور که می‌دانیم، رابطه هم‌نهشتی به پیمانه $m(\overset{m}{\equiv})$، روی Z یک رابطه هم ارزی است (یعنی دارای سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی است)، بنابراین رابطه $\overset{m}{\equiv}$، مجموعه Z را افراز می‌کند.

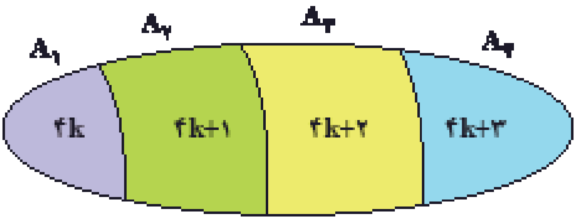
واضح است که با توجه به تعریف رابطه هم‌نهشتی و خواص رابطه عاد کردن داریم :

۱) $\forall a \in Z, m \in N \quad a \overset{m}{\equiv} a$ انعکاسی

۲) $\forall a,b \in Z, m \in N \quad a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a$ تقارنی

۳) $\forall a,b,c \in Z, m \in N \quad a \overset{m}{\equiv} b, b \overset{m}{\equiv} c \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$ تعدی

در این درس، برای هر عضو Z، کلاس یا دسته هم‌نهشتی با عنوان قرارداد تعریف شده است. با توجه به فعالیتی که مطرح شد، رابطه $\overset{4}{\equiv}$، فقط دارای چهار کلاس یا دسته هم‌نهشتی می‌باشد که این چهار کلاس، مجموعه Z را به شکل زیر افراز می‌کند.



در حالت کلی می‌توان گفت که رابطه $\overset{m}{\equiv}$، دارای m دسته هم‌نهشتی $[0],[1],[2],\ldots,[m-1]$ می‌باشد.

در ادامه درس، در صفحه ۱۹، برای استفاده از رابطه هم‌نهشتی، ویژگی‌هایی از آن مورد بررسی قرار گرفته است.

تکمیل اثبات ویژگی ۱

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a+c-b-c=(a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a-c-b+c=(a-c)-(b-c) \Rightarrow a-c \overset{m}{\equiv} b-c$$

تکمیل اثبات ویژگی ۲

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid c\times(a-b)=ac-bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

در صفحه ۲۰، تأکید می‌شود که عکس ویژگی ۲ برقرار نیست. یعنی :

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \not\Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

به عنوان مثال، $۶ \overset{۱۶}{\equiv} ۱۴ \not\Rightarrow ۲\times۶ \overset{۱۶}{\equiv} ۲\times۱۴$.

برای اثبات ویژگی ۳، از ویژگی ۱ ($a|b \Rightarrow a|mb$) استفاده شده است و تأکید می‌شود که عکس ویژگی ۳ برقرار نیست. یعنی : $a^n \overset{m}{\equiv} b^n \not\Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$

اثبات ویژگی ۴

اثبات ۱

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid ac-bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid c-d \Rightarrow m \mid bc-bd \end{array}\right\} \Rightarrow m \mid (ac-bc)+(bc-bd)$$

$$\Rightarrow m \mid ac-bd \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$$

اثبات ۲ و ۳

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid c-d \end{array}\right\} \Rightarrow m \mid (a \pm c)-(b \pm d) \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d$$

سپس تذکری بیان شده است : $a = mq + r \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} r$ ، این رابطه در واقع نشان می‌دهد هم‌نهشتی همان قضیه تقسیم است بدون حضور خارج قسمت.

درصفحه ۲۱، نکاتی مهم همراه با مثال‌های حل شده، برای درک بهتر دانش‌آموزان مطرح شده است.

پاسخ مربوط به مثال نتیجه ۱ : $۲۶۹ \overset{۱۱}{\equiv} ? \xrightarrow{۲۶۹=۱۱\times۲۴+۵} ۲۶۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$

پس از بیان ویژگی‌ها و نتایج ذکر شده، از هم‌نهشتی‌ها به عنوان ابزاری برای یافتن باقیمانده تقسیم اعداد توان‌دار و بزرگ بر اعداد طبیعی استفاده می‌شود که یکی از کاربردهای رابطه هم‌نهشتی می‌باشد.

در فعالیت صفحه ۲۲، ابتدا عدد نویسی در مبنای ۱۰ را یادآور می‌شود و سپس رابطه هم‌نهشتی را برای یافتن باقیمانده تقسیم عدد بر ۹ به‌کار می‌برد و نتیجه‌ای که از حل این فعالیت حاصل می‌شود را در حالت کلی برای هر عدد n رقمی بسط می‌دهد.

هدف از کاردرکلاس صفحه ۲۳، این است که دانش‌آموزان به قاعده‌هایی کلی برای یافتن باقیمانده تقسیم اعداد n رقمی بر ۲، ۳ ، ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد پی ببرند.

معمولاً در مسائل هم‌نهشتی اگر پایه بزرگ‌تر از پیمانه یا بزرگ‌تر از نصف پیمانه باشد، ابتدا آن را کوچک

کرده و به کوچک‌ترین عدد مثبت یا منفی در آن پیمانه تبدیل می‌کنیم. از طرفی برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم a^n بر m، گام اول، پیدا کردن توانی از a است که باقیمانده آن بر m برابر ۱ یا ۱− باشد.

حل کاردرکلاس صفحه ۲۳

۱

$A=۵۹۸۳۴۸$

$A=۵\times۱۰^۵+۹\times۱۰^۴+۸\times۱۰^۳+۳\times۱۰^۲+۴\times۱۰+۸$

$$۱۰^۵\overset{۳}{\equiv}۱\overset{\times۵}{\Rightarrow}۵\times۱۰^۵\overset{۳}{\equiv}۵$$
$$۱۰^۴\overset{۳}{\equiv}۱\overset{\times۹}{\Rightarrow}۹\times۱۰^۴\overset{۳}{\equiv}۹$$
$$۱۰^۳\overset{۳}{\equiv}۱\overset{\times۸}{\Rightarrow}۸\times۱۰^۳\overset{۳}{\equiv}۸$$
$$۱۰^۲\overset{۳}{\equiv}۱\overset{\times۳}{\Rightarrow}۳\times۱۰^۲\overset{۳}{\equiv}۳$$
$$۱۰\overset{۳}{\equiv}۱\overset{\times۴}{\Rightarrow}۴\times۱۰\overset{۳}{\equiv}۴$$
$$۸\overset{۳}{\equiv}۸$$

$$A\overset{۳}{\equiv}۵+۹+۸+۳+۴+۸\Rightarrow A\overset{۳}{\equiv}۱\Rightarrow r=۱$$

بنابراین، باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ ، با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ برابر است.

۲ همان‌طور که در مسئله اشاره شد :

$$۱۰\overset{۱۱}{\equiv}-۱\Rightarrow\begin{cases}۱۰^n\overset{۱۱}{\equiv}-۱ & n \text{ فرد}\\ ۱۰^n\overset{۱۱}{\equiv}۱ & n \text{ زوج}\end{cases}$$

$$A=۱۰^{n-۱}a_{n-۱}+\cdots+۱۰^۲a_۲+۱۰a_۱+a_۰\Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}a_۰-۱\times a_۱+۱\times a_۲-۱\times a_۳+\cdots+(-۱)^{n-۱}a_{n-۱}$$

یعنی برای یافتن باقیمانده تقسیم یک عدد n رقمی بر ۱۱، کافی است از رقم یکان شروع و ارقام را یک در میان با علامت مثبت و منفی جمع کنیم و عدد حاصل را بر ۱۱ تقسیم کنیم. در کتاب، باقیمانده تقسیم عدد $A=۴۹۸۵۳۲۷$ بر ۱۱ به همین طریق حساب شده و $r=۶$ است.

۳ بسط عدد A در مبنای ۱۰ به صورت زیر است :

$A=۱۰^{n-۱}a_{n-۱}+\cdots+۱۰^۲a_۲+۱۰a_۱+a_۰$

از طرفی می‌دانیم : $10 \overset{2}{\equiv} 0$, $10 \overset{5}{\equiv} 0$, $10 \overset{10}{\equiv} 0$، بنابراین :

$$\forall k \in N \ , \ 10^k \overset{2}{\equiv} 0 \ , \ 10^k \overset{5}{\equiv} 0 \ , \ 10^k \overset{10}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow A \overset{2,5,10}{\equiv} 0 \times a_{n-1} + 0 \times a_{n-2} + \cdots + 0 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{2}{\equiv} a_0 \ , \ A \overset{5}{\equiv} a_0 \ , \ A \overset{10}{\equiv} a_0$$

یعنی، باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲ یا ۵، برابر است با باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲ یا ۵ و باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰، برابر است با خود رقم یکان آن عدد.

نتیجه‌ای که از این قاعده می‌گیریم این است که، هر گاه بخواهیم رقم سمت راست یا رقم یکان یک عدد تواندار و بزرگ را حساب کنیم، باید هم‌نهشتی آن عدد را به پیمانه ۱۰ محاسبه نماییم. پیدا کردن رقم یکان، کاربرد جالب دیگری از هم‌نهشتی‌ها است.

در مورد شرط بخش‌پذیری بر اعداد ۲، ۵ و ۱۰ می‌گوییم : عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن زوج باشد یا عدد زوج باشد. عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد. عددی بر ۱۰ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن صفر باشد.

مسائلی از قبیل روزهای هفته، ساعت و ماه که حالت گردشی داشته و با افزودن عدد ثابتی (۷ روز، ۲۴ ساعت یا ۱۲ ماه) به وضعیت و شرایط قبلی برمی گردند، به عنوان مثال‌هایی عملی از هم‌نهشتی هستند.

در صفحه ۲۴، کاربرد هم‌نهشتی در تقویم نگاری و تعیین روزهای هفته بر حسب تاریخ داده شده بیان می‌شود و فعالیتی برای درک بهتر دانش‌آموزان از این کاربرد، مطرح شده است.

پاسخ قسمت ۲ فعالیت صفحه ۲۴

از روی تقویم سال ۹۷، هفتم تیر روز پنج شنبه بوده است. حال اگر فاصله ۷ تیر تا ۲۲ بهمن در سال ۹۷ را حساب کنیم، داریم : ۲۴ روز در تیر ماه و دو ماه مرداد و شهریور (۳۱ روزه) و چهار ماه مهر و آبان و آذر و دی (۳۰ روزه) و ۲۲ روز تا ۲۲ بهمن، یعنی : $d=24+2\times31+4\times30+22=228$ از طرفی $228 \overset{7}{\equiv} 4$ و با توجه به جدول زیر، روز متناظر با عدد ۴ ، دوشنبه است، یعنی ۲۲ بهمن سال ۹۷ روز دوشنبه می‌باشد.

چ	س	د	ی	ش	ج	پ
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

مبحث بعدی درس، در مورد معادله هم‌نهشتی است. هم‌نهشتی‌ها می‌توانند خیلی شبیه به معادلات مورد بحث قرار گیرند، وقتی که در رابطه آنها مجهولی باشد. ابتدا تعریف و شکل کلی یک معادله هم‌نهشتی و منظور از حل این معادله بیان شده است. به دانش‌آموزان تأکید شود که منظور از یک جواب از معادله هم‌نهشتی، عدد صحیحی است که در این معادله صدق می‌کند.

در صفحه ۲۵، مثال‌هایی از معادله هم‌نهشتی مطرح شده است، که در صورت وجود جواب، با به‌کارگیری از خواص و ویژگی‌های هم‌نهشتی می‌توان جواب‌های عمومی معادله را به‌دست آورد.

با توجه به قضیه مطرح شده «شرط لازم و کافی برای آنکه معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ در Z جواب داشته باشد، آن است که $(a,m) \mid b$» ، به دانش‌آموزان تأکید گردد برای حل معادله‌های هم‌نهشتی، ابتدا باید شرط وجود جواب در آنها، مورد بررسی قرار گیرد.

در صفحه ۲۶، مبحث معادله سیاله خطی مطرح می‌شود. در واقع یکی از کاربردهای مهم هم‌نهشتی‌ها در حل معادلات سیاله است. ابتدا فعالیتی از مثالی عینی و کاربردی مطرح شده است که قابل درک برای دانش‌آموزان می‌باشد و با تکمیل این فعالیت به مفهوم معادله سیاله خطی پی می‌برند.

همان‌طور که می‌دانیم، معادله درجه اول $ax+by=c$ در صفحه مختصات، معادله یک خط راست است که از بی‌نهایت نقطه در صفحه می‌گذرد و مختصات این نقاط مانند$A(x_\circ,y_\circ)$، در معادله خط فوق صدق می‌کند، یعنی $(x_\circ,y_\circ)$ جواب معادله است و در نتیجه : $ax_\circ+by_\circ=c$

معادله خط راست $ax+by=c$ $(a,b,c\in Z)$ به معادله سیاله خطی معروف است که دارای دو مجهول x و y می‌باشد و هدف از بررسی این معادله این است که بدانیم آیا در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است یا نیست. یعنی آیا مختصات نقطه ای مانند $A(x_\circ,y_\circ)$ که $x_\circ\in Z$, $y_\circ\in Z$ ، در آن صدق می‌کند یا خیر؟ در واقع ما به دنبال ملاکی برای تشخیص این مطلب هستیم که در چه صورت معادله سیاله خطی در Z دارای جواب است.

همان‌طور که در کتاب مطرح می‌شود، معادله سیاله خطی $ax+by=c$ در Z دارای جواب است، اگر و فقط اگر، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b(ضرایب x و y) عدد c را بشمارد. یعنی : $(a,b)\mid c$

معادله سیاله خطی در Z یا هیچ جوابی ندارد و یا دارای بی‌شمار جواب است. در معادله سیاله $ax+by=c$، اگر $(a,b)=1$، در این صورت معادله همواره در Z دارای جواب است.

اولین مرحله در حل معادلات سیاله، ساده کردن آن است، یعنی ابتدا بررسی می‌کنیم که ضرایب x و y فاکتور نداشته باشند، سپس اقدام به حل کنیم. اگر بخواهیم وجود و تعداد جواب‌های معادله سیاله خطی را بررسی کنیم، کافی است بتوانیم این معادله را به یک معادله هم‌نهشتی تبدیل کنیم، که چنین عملی امکان‌پذیر است. در واقع، اگر شرط وجود جواب در معادله $ax+by=c$ برقرار باشد، برای یافتن جواب‌های عمومی

این معادله، مثلاً اگر x را بخواهیم، طرفین را در پیمانه b هم نهشت قرار می‌دهیم و آن را به فرم یک معادله هم‌نهشتی می‌نویسیم. حال با استفاده از خواص و ویژگی‌های هم‌نهشتی، معادله را حل می‌کنیم، تا مجهول x به دست آید، سپس می‌توان آن را در معادله اصلی جایگذاری نمود تا مجهول دیگر یعنی y نیز به‌دست آید.

هدف از کاردرکلاس صفحه ۲۷، این است که دانش‌آموزان با تکمیل پاسخ سؤالات به درک بهتری از درس برسند. برای حل معادله سیاله خطی، به دانش‌آموزان تأکید شود ابتدا شرط وجود جواب را در این معادله بررسی کنند و تشخیص دهند معادله دارای جواب صحیح است یا خیر، اگر شرط وجود جواب برقرار بود با تبدیل معادله سیاله خطی به معادله هم‌نهشتی، جواب‌های معادله و تعداد آنها را مشخص کنند.

در ادامه کاردرکلاس، مسئله‌های متنوعی از دنیای واقعی برای نشان دادن کاربرد معادله سیاله خطی مطرح شده است. دانش‌آموزان با بررسی حل آنها، متوجه می‌شوند مسائلی که معادله سیاله خطی را به زندگی روزمره مرتبط می‌سازد باید $x \geq 0$ و $y \geq 0$ باشند، چون تعداد اشیا هرگز منفی نمی شود.

توصیه آموزشی

❑ به دانش‌آموزان تأکید شود، به اثبات ویژگی‌های هم‌نهشتی توجه داشته باشند، تا به درک خوبی از این مفهوم برسند و بتوانند از این ویژگی‌ها به درستی در حل مسائل استفاده نمایند.

❑ استفاده از روش گفتمان ریاضی در کلاس باعث می‌شود که معلم با بسیاری از تفکرات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان آشنا شده و امکان برطرف کردن آنها را در کلاس و با مشارکت دیگر دانش‌آموزان پیدا کند.

❑ زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که باید در طرح سؤالات ارزشیابی و امتحانات رعایت گردد.

اشتباهات رایج دانش آموزان

❑ به این نکته توجه ندارد که قانون حذف برای رابطه هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست.

❑ وقتی دو طرف رابطه هم‌نهشتی را به توان می‌رساند، به اشتباه، پیمانه را هم به توان می‌رساند. یعنی از $a \overset{m}{\equiv} b$ نتیجه می‌گیرد : $a^n \overset{m^n}{\equiv} b^n$. (به راحتی می‌توان با یک مثال نقض، این حکم را رد نمود.)

❑ در حل معادله هم‌نهشتی $5x \overset{19}{\equiv} 1$ می‌نویسد : $x \overset{19}{\equiv} \frac{1}{5}$ ، که اساساً بی‌معنی است و به این موضوع توجه نداشته است که ما به حوزه اعداد صحیح کار داریم و عدد $\frac{1}{5}$ ، عددی صحیح نیست.

❑ ممکن است در حل مسئله‌ها بر اثر بی دقتی خطاهای محاسباتی داشته باشد.

حل تمرینات درس سوم صفحه ۲۹ کتاب

۱

$$۱۳۹۸ = ۱۵۵ \times ۹ + ۳ \Rightarrow ۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

پس عدد ۱۳۹۸ به دسته هم‌نهشتی $[۳]_۹$ تعلق دارد.

۲

$$k \overset{۳}{\equiv} ۰ \quad \text{یا} \quad k \overset{۳}{\equiv} ۱ \quad \text{یا} \quad k \overset{۳}{\equiv} ۲$$

می دانیم رابطه $\overset{۳}{\equiv}$ مجموعه Z را به سه مجموعه $[۰]$ ، $[۱]$ و $[۲]$ افراز می‌کند و طبق تعریف افراز، باید $Z=[۰]\cup[۱]\cup[۲]$، پس اگر K عددی صحیح و دلخواه باشد، باید $K\in[۰]_۳$ یا $K\in[۱]_۳$ یا $K\in[۲]_۳$ که طبق تعریف دسته‌های هم‌نهشتی، ثابت می‌شود :

$$K \in [۰]_۳ \Rightarrow K \overset{۳}{\equiv} ۰ \quad \text{یا} \quad K \in [۱]_۳ \Rightarrow K \overset{۳}{\equiv} ۱ \quad \text{یا} \quad K \in [۲]_۳ \Rightarrow K \overset{۳}{\equiv} ۲$$

۳

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \overset{n|m}{\Rightarrow} n \mid a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$$

۴

$$\left.\begin{array}{l} d \mid m \ , \ m \mid a-b \rightarrow d \mid a-b \\ d \mid n \ , \ n \mid b-c \rightarrow d \mid b-c \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid (a-b)+(b-c) \Rightarrow d \mid a-c \Rightarrow a \overset{d}{\equiv} c$$

۵ فرض کنیم باقیمانده تقسیم a بر m و b بر m، مساوی r باشد، ثابت می‌کنیم $a \overset{m}{\equiv} b$

$$\left.\begin{array}{l} d = mq_۱ + r \\ b = mq_۲ + r \end{array}\right\} \Rightarrow a-b = m\underbrace{(q_۱ - q_۲)}_{q}$$
$$\Rightarrow a-b = mq \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

۶ عکس تمرین ۵ : اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ باشد، آنگاه باقیمانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m، مساوی است.

اثبات : فرض کنیم $a \overset{m}{\equiv} b$ یعنی $a-b=mk$ و فرض کنیم باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، ثابت می‌کنیم باقیمانده تقسیم b بر m نیز برابر با r است.

$$a-b=mk \quad (۱) \qquad , \qquad a = mq + r \qquad (۰ \leq r < m) \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} (mq+r)-b = mk \Rightarrow b = m\underbrace{(q-k)}_{q'} + r$$
$$\Rightarrow b = mq' + r \qquad (۰ \leq r < m) \qquad (۳)$$

رابطه (۳) نشان می‌دهد که باقیمانده تقسیم b بر m مساوی با r است.

۷

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰}\times a^n + \binom{n}{۱}\times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲}\times a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳}\times a^{n-۳}b^۳ + \cdots + \binom{n}{n}\times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

با توجه به بسط دو جمله ای خیام :

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b + \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲ + \ldots + b^n$$

(تمام جمله‌ها فاکتور ab دارند.)

$$\Rightarrow (a+b)^n - a^n - b^n = abQ$$

$$\Rightarrow (a+b)^n - (a^n + b^n) = abQ \Rightarrow (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

۸ با توجه به تمرین ۷، در این سؤال a=۱۱ و b=۱۲ است، که در این صورت به ازای n=۵۱، عدد $۱۲^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-(۱۲+۱۱)^{۵۱}$ یا $۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲=۱۲×۱۱ بخش پذیر است. یعنی :

$$۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱} \overset{۱۳۲}{\equiv} ۰$$

۹

$$۲^{۱۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲ \Rightarrow ۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴ \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۱۱} + ۷ \overset{۲۳}{\equiv} ۱ + ۷$$

$$\Rightarrow (۲^{۱۱}+۷)\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} (۱+۷)\times ۹ \Rightarrow (۲^{۱۱}+۷)\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۷۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \Rightarrow r = ۳$$

۱۰ دو عدد (۳a–۵) و (۴a–۷) رقم یکان برابر دارند، یعنی به پیمانه ۱۰ با یکدیگر هم نهشت هستند.

$$۴a - ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳a - ۵ \Rightarrow ۴a - ۳a \overset{۱۰}{\equiv} ۷ - ۵ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \overset{\times ۹}{\Rightarrow} ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۱۸ \overset{+۶}{\Rightarrow} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

پس رقم یکان عدد(۹a+۶)، عدد ۴ است.

۱۱

$$۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + ۶! + \ldots + ۵۰۰! \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۴ + ۰ + ۰ + \ldots + ۰ = ۱۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \Rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

پس رقم یکان عددA، عدد ۳ است.

۱۲ معادله جواب دارد. ۱۱|۱=(۷,۵) $\Rightarrow$ ۷x+۵y=۱

$$\Rightarrow ۷x \overset{۵}{\equiv} ۱۱ \Rightarrow ۷x \overset{۵}{\equiv} ۱۱ + ۲\times ۵ = ۲۱$$

$$\Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۵k + ۳ \qquad (k \in z)$$

$$۷x+۵y=۱ \Rightarrow ۷(۵k+۳)+۵y=۱۱ \Rightarrow ۳۵k+۲۱+۵y=۱۱$$

$$\Rightarrow y=-۷k-۲ \quad (k\in z)$$

۱۳

$$۲۰۰۰۰x+۵۰۰۰۰y=۲۹۰۰۰۰ \xrightarrow{\div ۱۰۰۰۰} ۲x+۵y=۲۹$$

$$\Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹+۱\times ۵$$

$$\Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۳۴ \Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \Rightarrow x=۵k+۱۷$$

$$۲x+۵y=۲۹ \Rightarrow ۲(۵k+۱۷)+۵y=۲۹ \Rightarrow ۱۰k+۳۴+۵y=۲۹$$

$$\Rightarrow ۵y=-۱۰k-۵ \Rightarrow y=-۲k-۱$$

k	x	y
-۱	۱۲	۱
-۲	۷	۳
-۳	۲	۵

(به سه طریق)

۱۴

الف) $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

ب) $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$

ج) $۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$

الف) $(۴۲۳,۱۱)=۱|۷۹$ معادله جواب دارد.

$$۴۲۳=۱۱\times ۳۸+۵ \Rightarrow ۴۲۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$$

$$۷۹=۱۱\times ۷+۲ \Rightarrow ۷۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۲$$

$$۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲+۳\times ۱۱ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} ۷$$

$$\Rightarrow x=۱۱k+۷ \qquad (k\in z)$$

ب) $(۸,۱۲)=۴|۲۰$ معادله جواب دارد.

$$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰-۱\times ۱۲=۸ \xRightarrow{(۸,۱۲)=۴} x \overset{\frac{۱۲}{۴}}{\equiv} ۱ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow x=۳k+۱ \qquad (k\in z)$$

ج) $(۵۱,۶)=۳ \nmid ۱۱$ معادله جواب ندارد.

۱۵ **۲۹** روز مهر و چهار ماه آبان و آذر و دی و بهمن و **۷** روز تا **۷** اسفند

$$۲۹+۴\times۳۰+۷=۱۵۶\overset{۷}{\equiv}۲$$

ش	ج	پ	چ	س	د	ی
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

پس ۷ اسفند ماه، روز سه شنبه است.

۱۶ شهریور (۳۱ روزه) و چهار ماه مهر و آبان و آذر و دی (۳۰ روزه) و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن

$$۳۱+۴\times۳۰+۱۲=۱۶۳\overset{۷}{\equiv}۲$$

چون روزها را در جهت عقب برگشتیم، با توجه به جدول زیر :

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۳۱ مرداد ماه، روز چهارشنبه است.

۱۷

$$۵a+۹\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}-۹\Rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}-۹+۴\times۱۱$$

$$\Rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}۳۵\Rightarrow a\overset{۱۱}{\equiv}۷\Rightarrow a=۱۱k+۷\quad (k\in z)$$

۱۸ معادله جواب دارد. ۲۳|۱=(۳,۵)

$$۳x+۵y=۲۳\Rightarrow ۳x\overset{۵}{\equiv}۲۳\Rightarrow ۳x\overset{۵}{\equiv}۲۳-۱\times۵$$

$$\Rightarrow ۳x\overset{۵}{\equiv}۱۸\Rightarrow x\overset{۵}{\equiv}۶\Rightarrow x=۵k+۶$$

$$۳x+۵y=۲۳\Rightarrow ۳(۵k+۶)+۵y=۲۳\Rightarrow ۵y=-۱۵k+۵\Rightarrow y=-۳k+۱$$

k	x	y
۰	۶	۱
-۱	۱	۴

(به دو طریق)

۱۹ معادله جواب دارد. $x+y=۹ \Rightarrow (۱,۱)=۱|۹$

$$\Rightarrow x \overset{۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow x = k+۹$$

$$x+y=۹ \Rightarrow k+۹+y=۹ \Rightarrow y=-k$$

(به ده طریق)

k	۰	−۱	−۲	−۳	−۴	−۵	−۶	−۷	−۸	−۹
x	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
y	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

۲۰ معادله جواب دارد. $۷x+۹y=۷۳ \Rightarrow (۷,۹)=۱|۷۳$

$$\Rightarrow ۹y \overset{۷}{\equiv} ۷۳ \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۳y \overset{۷}{\equiv} ۱+۲\times ۷$$

$$\Rightarrow ۳y \overset{۷}{\equiv} ۱۵ \Rightarrow y \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow y = ۷k+۵$$

$$۷x+۹y=۷۳ \Rightarrow ۷x+۹(۷k+۵)=۷۳$$

$$\Rightarrow ۷x+۶۳k+۴۵=۷۳ \Rightarrow ۷x=-۶۳k+۲۸ \Rightarrow x=-۹k+۴$$

(به یک طریق)

k	x	y
۰	۴	۵

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جاهای خالی را کامل کنید.

الف) ......|...... $\Leftrightarrow$ $۰\times۱۸=۰$ («|» نماد عادکردن) .

ب) $a=$...... یا $a=$...... $\Leftrightarrow$ $a|۱$

پ) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$، در این صورت $a=$...... یا $a=$...... .

ت) اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه ....

ث) حاصل $(۳m+۱,۳m+۲)$ برابر .... است.

ج) اگر دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m، هم باقیمانده باشند، در این صورت ....

چ) معادله $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ دارای جواب نیست، زیرا ....

ح) اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و .... ، در این صورت $a \overset{m}{\equiv} b$.

خ) شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax+by=c$ دارای جواب باشد، آن است که ....

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. در صورت نادرست بودن، یک مثال نقض بیاورید.

الف) اگر $a|b+c$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$.

ب) اگر $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$.

پ) همواره ب م م دو عدد، ک م م همان دو عدد را می‌شمارد.

ت) همواره ک م م دو عدد، از ب م م همان دو عدد بزرگ‌تر است.

ث) اگر $a|b$ آنگاه $a^n|b^{n+1}$.

ج) اگر $a-b|a$، آنگاه $a-b|b$.

چ) اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $n|m$، آنگاه $a\overset{n}{\equiv}b$.

ح) $a\overset{m}{\equiv}b, c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$.

خ) $ac\overset{m}{\equiv}bc \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$.

د) $a\overset{m}{\equiv}b, c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow a+c\overset{m}{\equiv}b-d$.

ذ) $a^n\overset{m}{\equiv}b^n \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$.

۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) عدد $۳^{۵۲}-۲^{۳۹}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۷۱ ۲) ۷۲ ۳) ۷۳ ۴) ۷۴

ب) در یک تقسیم باقیمانده ۲۳ و خارج قسمت ۷ است. حداکثر چند واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم تا خارج قسمت تغییری نکند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

پ) باقیمانده تقسیم a بر ۹ و ۶ به ترتیب ۵ و ۳ است، باقیمانده تقسیم a بر ۱۸ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱۷ ۳) ۱ ۴) ۵

ت) باقیمانده تقسیم a و b بر ۱۷ به ترتیب ۱۵ و ۳ است. باقیمانده تقسیم $۳b-۲a$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

ث) اگر x و y جواب‌هایی برای معادله سیاله $۲x+۳y=۶$ باشند، مقدار $(x-y)$ کدام است؟

۱) $۵k+۲$ ۲) $۵k$ ۳) $-۵k-۲$ ۴) $۵k-۲$

ج) اگر معادله $۹x+my=۶$ در Z دارای جواب باشد، مجموعه جواب برای پارامتر m کدام است؟
$(۱\leq m\leq ۹), (m\in N)$

۱) $\{۳,۹\}$ ۲) $\{۶,۹\}$ ۳) $\{۳,۶\}$ ۴) $\{۱,۳,۶\}$

چ) در معادله $mx+(m-۱)y=۱۲$ مجموعه جواب برای پارامتر m کدام است، تا معادله در Z دارای جواب باشد؟

۱) Z ۲) $\{۱,-۱\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$

ح) اگر a و b اعدادی فرد باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $a^۲-b^۲=۸k$ ۲) $۸|(a^۲+b^۲)-۲$ ۳) $۱۶|a^۴-b^۴$ ۴) $۱۶|a^۲-b^۲$

خ) کدام عبارت زیر درست است؟

۱) $a|bc \Rightarrow a|b$ یا $a|c$ ۲) $a|b-c \Rightarrow a|b$ یا $a|c$

۳) $a|b+c \Rightarrow a|b$ یا $a|c$ ۴) $a|b \Rightarrow a^۲|b^۲$

د) یک بسته ۲۸۸ کیلویی را به چند طریق می‌توان با وزنه‌های ۷ و ۱۹ کیلویی وزن کرد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

ذ) کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌بندی که نیاز به ۸۵۰ ریال تمبر دارد، با تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

ر) در هم‌نهشتی به پیمانه m، سه عدد a، ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند، کوچک‌ترین عدد سه رقمی a به‌طوری که مجموعه Z به تعداد کمتری کلاس هم‌ارزی افراز شود، کدام است؟

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۰۴ ۴) ۱۰۶

ز) اگر برای هر عدد طبیعی n، عدد a^n بر b^n بخش پذیر باشد، کدام گزاره نادرست است؟

۱) $(a,b^۲)=b^۲$ ۲) $[a^۲,b]=a^۲$ ۳) $(a,b)=|b|$ ۴) $[a,b]=|a|$

ژ) a و b هر دو عدد اول هستند. اگر ab مربع کامل باشد، کدام حکم همواره درست است؟

۱) a و b هر دو مربع کامل هستند. ۲) a و b هر دو مساوی یک هستند.

۳) a با b مساوی است. ۴) $a^۲b$ مربع کامل است.

س) اگر a مضربی از ۶ و b مضربی از ۱۵ باشد، باقیمانده تقسیم a بر b، بر کدام عدد همواره بخش پذیر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

ش) اگر بدانیم ۲۰ فروردین روز دوشنبه است، چهارمین شنبه بهمن ماه چه روزی است؟

۱) ۲۷ ام ۲) ۲۸ ام ۳) ۲۹ ام ۴) ۳۰ ام

ص) چند مجموعه از مجموعه‌های $A=\{-۷,۱۴,-۲۰,-۱۷,۲\}$، $B=\{۲۲,۱۲,۵۱,۱۶,۷۱\}$ و $C=\{-۱,-۲,-۳,-۴,-۵\}$، مجموعه همه دسته‌های هم‌نهشتی به پیمانه ۵ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

ض) اگر $11|a+b$، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $11|6a-5b$ ۲) $11|7a+4b$ ۳) $11|3a+9b$ ۴) $11|a^2+b^2$

ط) پنجم تیر ماه یک سال، روز شنبه است، اول مهر ماه این سال کدام است؟

۱) چهارشنبه ۲) پنجشنبه ۳) جمعه ۴) شنبه

ظ) به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به صورت‌های $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اول هستند؟

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۴ باقیمانده تقسیم $A=1!+2!+3!+...+2000!$ را بر ۲۴ بیابید.

۵ اگر $5|2k+1$، ثابت کنید: $25|14k^2+19k+6$.

۶ اگر $b>1$ و m و n اعداد طبیعی باشند، به طوری که $m|n$، ثابت کنید : $(b^m-1)|(b^n-1)$.

۷ اگر دو عدد ۲۴ و ۱۸ عدد m را عاد کنند، در این صورت کدام عدد همواره m را عاد می‌کند؟

۸ چند عدد اول P وجود دارد به طوری که $168P+1$ مجذور یک عدد طبیعی باشد؟

۹ اداره پستی فقط تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی برای فروش دارد. به چند طریق می‌توان با ترکیبی از این دو تمبر، بسته‌ای را به اندازه ۳۷۰۰ ریالی تمبرگذاری کرد؟

۱۰ اگر $b|n+1$ و $b|n^2+9n+1$ ثابت کنید : $b|7$.

۱۱ ثابت کنید اگر $a|b$ و $b\neq 0$، در این صورت $|a|\leq|b|$.

۱۲ در صورتی که a عدد صحیح و زوج بوده و باقیمانده تقسیم آن بر ۲۳ برابر ۱۳ باشد، ثابت کنید باقیمانده تقسیم عدد $\frac{a}{2}$ بر ۲۳، برابر ۱۸ می‌باشد.

۱۳ ثابت کنید اگر n یک عدد فرد باشد، آنگاه $24|n^3-n$.

۱۴ ب م م دو عدد $3n+4$ و $7n+9$ را بیابید.

۱۵ حاصل $\left([a,(a,b)],(a,[a,b])\right)$ را به دست آورید. $(a,b\in N)$

۱۶ دو عدد a و b نسبت به هم اول هستند و $54|(a+b)^2$، کوچک‌ترین مضرب مشترک a و ۳۶ را بیابید.

۱۷ اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $12n+7$ و $5n-2$ نسبت به هم اول نباشند، آنگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد را به‌دست آورید.

۱۸ اگر عدد زوج a بر ۲۱ تقسیم شود، باقی‌مانده برابر ۱۳ خواهد شد. باقی‌مانده تقسیم $\frac{a}{۲}$ بر ۲۱ را به‌دست آورید.

۱۹ باقی‌مانده تقسیم عدد ۱۳۸۵ بر ۱۲ را به‌دست آورید.

۲۰ ثابت کنید عدد $۲^{۱۱} - ۱$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

۲۱ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

۲۲ اگر $a|c$، حاصل $([c,۱],(a,[a,b]))$ را به دست آورید.

۲۳ اگر اول مهر در سالی روز پنج‌شنبه باشد، معین کنید ۲۲ بهمن همان سال چه روزی خواهد بود؟

۲۴ اگر دو عدد $(۲a - ۵)$ و $(۳a + ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۷a - ۳)$ را به‌دست آورید.

۲۵ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۴ \times (۲^{۱۱} - ۱)$ را بر ۲۳ بیابید.

۲۶ اگر باقی‌مانده تقسیم a و b بر ۲۷، به ترتیب ۱۲ و ۱۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم $(۲a - ۳b)$ بر ۲۷ را بیابید.

۲۷ عدد ۱۳۷۹ به کدام دسته هم نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟

۲۸ ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $۱۷^n - ۹^n - ۸^n$ بر عدد ۷۲ بخش‌پذیر است.

۲۹ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل و جواب عمومی برای هر یک به‌دست آورید.

۱) $۱۸x \overset{۴۲}{\equiv} ۷۲$

۲) $۹x \overset{۳۰}{\equiv} ۲۱$

۳) $۳x \overset{۱۰}{\equiv} ۷$

۴) $۹x \overset{۵}{\equiv} ۷$

۵) $-۱۱x \overset{۱۷}{\equiv} ۳$

۶) $۱۳x \overset{۱۱}{\equiv} -۱۵$

۷) $۲x \overset{۴}{\equiv} ۱$

۸) $۱۹x + ۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۴x$

۳۰ معادله‌های سیاله زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب عمومی برای آنها مشخص کنید.

۱) $۱۲x + ۱۵y = ۱۸$

۲) $۲۴x + ۹y = ۵۱$

۳) $۸x - ۶y = ۱۴$

۴) $۳۹x + ۱۳y = ۱۷$

۵) $۱۱x + ۱۳y = ۱۴$

۶) $۶x + ۹y = ۱۰$

۷) $۲۰x + ۱۲y = ۵۰$

۸) $۱۳x + ۷۱y = ۱$

فصل دوم

گراف و مدل‌سازی

نگاه کلی به فصل

نظریهٔ گراف یکی از شاخه‌های ریاضی است که گرچه اهمیّت آن بی‌شک به‌واسطهٔ کاربردهای مهم و زیبای آن است، اما در ریاضیات محض نیز جایگاه خاصی دارد زیرا در ارتباط تنگاتنگ با برخی مفاهیم مهم ریاضی محض به‌ویژه در شاخه‌های جبرخطی و جبر است. از آنجا که نظریهٔ گراف شامل کاربردهای زیادی است که واقعی، ملموس و قابل درک توسط دانش‌آموز هستند، لذا زمینهٔ مناسبی است برای مطرح‌شدن در ریاضیات مدرسه‌ای.

این فصل شامل دو درس است که در درس اول فقط معرفی گراف و تعاریف مقدماتی انجام شده است. سعی در این بوده است که از ارائه تعاریف غیرضروری پرهیز شود. از طرفی چون دانش‌آموزان اولین بار است که با این درس مواجه می‌شوند. گاهی اوقات پرهیز از ارائهٔ تعاریف رسمی به گونه‌ای که درک آن توسط دانش‌آموز مشکل باشد مدنظر بوده است به‌گونه‌ای که برخی تعاریف با توجه دادن دانش‌آموزان به شکل و مثال مطرح شده‌اند. در فصل دوم مفهوم احاطه‌گری مطرح شده است که یکی از مفاهیمی است که قابلیت بیان مدل‌سازی را به‌خوبی دارد و همچنین زمینهٔ بسیار مناسبی به جهت مطرح کردن کاربردهای قابل درک توسط دانش‌آموزان است.

نقشهٔ مفهومی

تصویر عنوانی

بسیاری از کاربردهای نظریهٔ گراف با مدل‌سازی یک مسئلهٔ واقعی و تبدیل آن به یک مسئلهٔ ریاضی انجام می‌پذیرد. تصویر عنوانی فصل یک نوع مدل‌سازی از بخشی از نقشهٔ شهر مشهد و تبدیل آن به یک گراف را نمایش می‌دهد.

دانستنی‌هایی برای معلم

ارتباط برخی مفاهیم نظریهٔ گراف با بعضی مفاهیم ریاضی محض بسیار جالب و شاید در ابتدای پیدایش گراف بسیار دور از ذهن می‌نمود. به‌طور مثال گراف کیلی با توجه به ساختار یک گروه جبری ساخته می‌شود. در این صورت ارتباطات بسیار جالبی بین مفاهیم جبری و مفاهیم نظریهٔ گراف برقرار است که از هر یک برای مطالعهٔ دیگری می‌توان بهره گرفت. همچنین شاخه‌ای از نظریهٔ گراف جبری به مطالعهٔ گراف‌ها با استفاده از جبر خطی و ماتریس مجاورت یک گراف می‌پردازد.

معرفی منابع برای معلمان

۱ D.B. West (2001) Introduction to graph theory.

۲ J.A.Bondy, V.S.R.Murty. (2008). Graph theory.

۳ T.W.Haynes, S.T.Hedetniemi, P.J.Slater. (1998). Fundamentals of domination in graph.

۴ N.Biggs. Algebraic Graph Theory.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ در هر کدام از موارد (الف) و (ب)، مجموعهٔ رأس‌های گرافِ G داده شده است.
به سؤالات مطرح شده پاسخ دهید.

۱ــ مرتبه و اندازهٔ گراف را مشخص نمایید.

۲ــ نمودار گراف را رسم کنید.

۳ــ $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.

۴ــ اگر x، رأسِ با درجهٔ $\Delta(G)$ و y، رأسِ با درجهٔ $\delta(G)$ باشد، مجموعه‌های $N_G(x)$ و $N_G(y)$ را مشخص نمایید.

۵ــ آیا می‌توانید دو رأس مانند x و y بیابید به‌گونه‌ای که $N_G(x) \subseteq N_G(y)$ ؟

الف) $V(G)=\{a, b, c, d, e, f\}$ و $E(G)=\{af, ab, ae, bc, be, ed, dc\}$

ب) $V(G)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ و $E(G)=\{ad, ae, bf, bc, dh, cg, ef, fg, gh, eh\}$

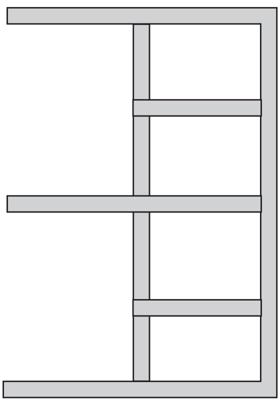
۲ گرافِ همبند و غیرتهیِ G را به‌گونه‌ای رسم کنید که a و b و c رأس‌هایی از آن باشند و داشته باشیم $N(a) \subseteq N(b) \subseteq N(c)$.

۳ گرافِ G را به‌گونه‌ای رسم کنید که a و b و c رأس‌هایی از آن باشند و داشته باشیم $N[a] \subseteq N[b] \subseteq N[c]$.

۴ ثابت کنید که اگر G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq ۵$ ، آنگاه G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۵ است.

۵ الف) اگر G یک گراف ۶ رأسی باشد و $\Delta(G) = ۳$ و $\delta(G) = ۱$، در این‌صورت $\Delta(\overline{G})$ و $\delta(\overline{G})$ را تعیین کنید.

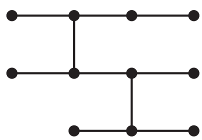
ب) اگر G یک گراف n رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین $\Delta(G)$ و $(\overline{\quad})$ برقرار است؟



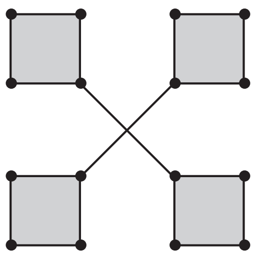
۶ شکل روبه‌رو قطعه‌ای از نقشهٔ یک شهرک است. می‌خواهیم چند دکهٔ روزنامه‌فروشی در برخی تقاطع‌های آن قرار دهیم به‌گونه‌ای که هرگاه در یک تقاطع یا در انتهای یک خیابان قرار داشته باشیم دکه‌ای به فاصلهٔ حداکثر یک تقاطع از ما وجود داشته باشد. چگونه این کار را انجام دهیم که با کمترین دکهٔ ممکن انجام شده باشد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۷ در هر یک از گراف‌های زیر عدد احاطه‌گری را مشخص کنید. (با بیان دلایل کافی)

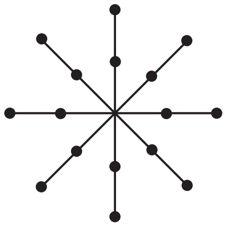
الف)



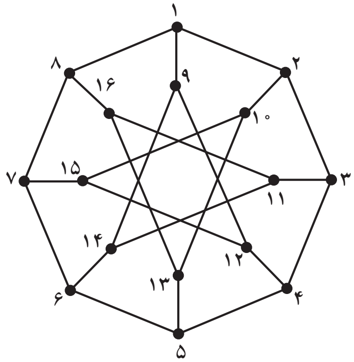
ب)



ت)



پ)



۸ در یک گروه ورزشی ۱۰ نفر عضو هستند و هر کدام دقیقاً با سه نفر از اعضای گروه دوست صمیمی هستند. می‌خواهیم به تعدادی از آنها خبری را بدهیم و از آنها بخواهیم به دوستان صمیمی خود درگروه خبر را اطلاع دهند. حداقل باید به چند نفر خبر بدهیم؟

۹ عدد احاطه‌گری گراف‌های Cn و Pn را مشخص نمایید.

۱۰ یک گراف ۳ رأسی بکشید که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمالی با اندازهٔ متفاوت با $\gamma(G)$ داشته باشد.

۱۱ یک گراف ۳ رأسی بکشید که هیچ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمالی با اندازهٔ متمایز از $\delta(G)$ نداشته باشد.

درس اول

معرفی گراف

اهداف

۱ شناخت گراف و درک تعاریف این بخش
۲ آشنایی با برخی خواص گراف‌ها

روش تدریس

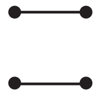
در ابتدا مسائلی تاریخی، مرتبط با گراف‌ها مطرح گردیده است. آشنایی دانش‌آموز با این مسائل ماهیت کاربردی این بخش از ریاضی را در ذهن دانش‌آموزان جا می‌اندازد. از آنجا که دانش‌آموزان در اولین مواجهۀ خود با درس گراف می‌باشند، ارائۀ تعاریف رسمی مانند تعریف گراف به‌صورت تابعی که هر یال را به دو رأس نظیر می‌کند و تعاریف رسمی دیگری از این قبیل می‌تواند از مواجهۀ راحت و آسان دانش‌آموز با این درس جلوگیری نماید. لذا سعی شده است اکثر تعاریف با استفاده از شکل و نمودار گراف و به‌صورت شهودی به دانش‌آموزان ارائه گردد.

بسیاری از خواصِ گراف زمانی که با استدلالی شهودی و ملموس ارائه گردند برای دانش‌آموزان بسیار قابل درک‌تر می‌شوند. به‌طور مثال در فعالیت دوم صفحۀ ۳۹ که منجر به اثبات قضیۀ پایین این صفحه می‌گردد سعی شده است با انجام مراحل این فعالیت دانش‌آموز حکم قضیه را به‌طور ملموس درک نماید. همچنین در فعالیت دوم صفحۀ ۴۰، در اثبات مسئله چند بار از فرض مسئله استفاده می‌شود و نوع جالبی از اثبات به دانش‌آموزان ارائه می‌شود. یکی از ویژگی‌های مهم گراف استفاده از استدلال‌های کلامی زیبا در مسائل آن است و یکی از اهداف مهم در گراف نیز تقویت استدلال کلامی دانش‌آموزان است لذا سعی کنید در پایان چنین فعالیتی دانش‌آموزان را تشویق کنید که اثبات را از ابتدا به‌صورت شفاهی بازگو نمایند.

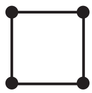
حل برخی تمرینات درس اوّل صفحه ۴۱

۸

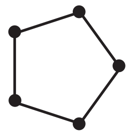
الف)



ب)

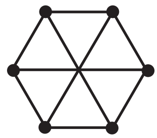


پ)



ت) اگر چنین گرافی داشته باشیم مجموع درجات آن ۱۵ می‌شود و این غیرممکن است.

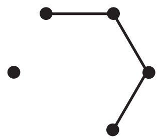
ث)



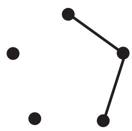
ج) مانند قسمت (ت) امکان‌پذیر نیست.

۹

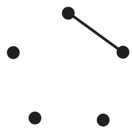
الف)



ب)

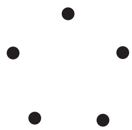


پ)



ت) امکان‌پذیر نیست.

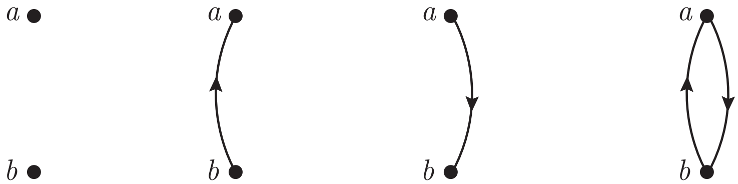
ث)



۱۰ اگر به ازای هر نفر یک رأس قرار دهیم و رئوس نظیر برای کسانی که با هم دست داده‌اند را به هم وصل کنیم، با توجه به فرض مسئله و در صورتی که نفر هفتم با ۵ نفر دست داده باشد گرافی با مجموع درجات فرد خواهیم داشت که این غیرممکن است.

$(۶\times ۲) + (۱ \times ۵) = ۱۷$

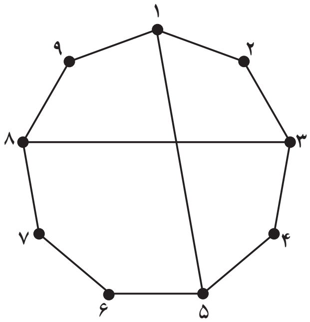
۱۱ **الف)** می‌توان به ازای هر نفر یک رأس قرار داد و اگر فرضاً a با b دوست باشد، رأس a را با یک یال جهت‌دار (از a به b) به رأس b وصل کرده لذا کافی است تعداد تمام گراف‌های جهت‌دار با ۵ رأس را مشخص کرد. برای این کار ۵ رأس را درنظر می‌گیریم و تمام حالت‌هایی را که تعدادی یال جهت‌دار بین برخی، همه یا هیچ جفت از رئوس آن قرار داشته باشد مشخص می‌کنیم. اما ده $(\binom{۵}{۲} = ۱۰)$ جفت رأس را می‌توان درنظر گرفت که برای هر جفت از آنها یکی از حالات زیر می‌تواند اتفاق بیفتد:



لذا $۴^{\binom{۵}{۲}} = ۴^{۱۰}$ حالت امکان‌پذیر است.

ب) در این حالت کافی است تعداد گراف‌های ۵ رأسی (نه جهت‌دار) را مشخص کنیم که از آنجا که برای هر جفت رأس دو حالت وجود دارد، در این حالت تعداد حالات برابر بیست $۲^{\binom{۵}{۲}} = ۲^{۱۰}$ است.

۱۲ **الف)**



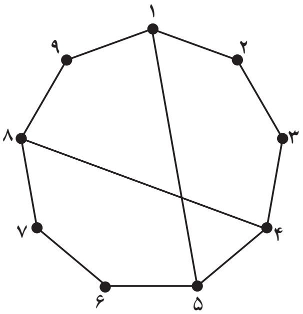
۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱ ← دور به طول ۹

۱۲۳۴۵۱ ← دور به طول ۵

۱۵۶۷۸۹۱ ← دور به‌طول ۶

۱۲۳۸۷۶۵۱ ← دور به طول ۷

ب)



۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱ ← دور به طول ۹

۱۲۳۴۵۱ ← دور به طول ۵

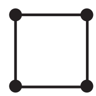
۱۵۶۷۸۹۱ ← دور به‌طول ۶

۱۲۳۴۸۷۶۵۱ ← دور به طول ۸

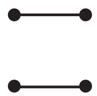
۱۳ الف) بله. با اثباتی کاملاً مشابه با فعالیت دوم صفحهٔ ۴۰ می‌توان ثابت کرد.

ب) خیر. به‌عنوان یک مثال نقض در گراف P_2 داریم $\delta(P_2)=1$ و این گراف به وضوح مسیری به‌طول ۲ ندارد.

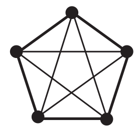
۱۴ الف)



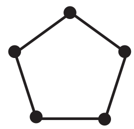
ب)



۱۵ الف)



ب)



درس دوم

مدل‌سازی با گراف

اهداف

۱ درک مفهوم احاطه‌گری در یک گراف و تعاریف ارائه شده در این درس
۲ مدل‌سازی برخی مسائل با استفاده از گراف‌ها
۳ آشنایی با خواص مجموعه‌های احاطه‌گر
۴ تعیین عدد احاطه‌گری برخی از گراف‌ها
۵ استفاده از مفهوم احاطه‌گری در حل مسائل کاربردی
۶ استفاده از استدلال کلامی در حل برخی مسائل احاطه‌گری

روش تدریس

ارائهٔ مفهوم احاطه‌گری با استفاده از طرح یک مسئله که توسط گراف مدل‌سازی می‌شود می‌تواند وجه کاربردی این مفهوم را بیشترنمایان سازد. پس از ارائه مفهوم مجموعهٔ احاطه‌گر و عدد احاطه‌گری به‌جاست چند مثال ساده مطرح گردد و فرصت تفکر دانش‌آموزان به مفاهیم ارائه شده داده شود. در مثال صفحهٔ ۴۵ بهتر است سعی شود چگونگی مدل‌سازی مسئله با گرافِ موردنظر بیشتر توضیح داده شده و علت اینکه چرا فقط رئوسِ متناظر با شهرهایی که فاصلهٔ کمتر یا مساوی ۵۰ دارند به‌هم وصل می‌شوند توضیح داده شود.

دقت کنید که یکی از اهداف مهم این درس ارتقای قدرت استدلال کلامی دانش‌آموزان است. لذا معلم باید در تعیین سؤال‌ها و طبقه‌بندی آنها از نظر میزان سختی درک استدلال آنها دقت نماید و گام به گام این نوع استدلال را، توسط مطرح‌کردن سؤالات مناسب و ارائهٔ راهنمایی مناسب، در دانش‌آموزان ارتقا دهد. قابل توجه است که تعیین مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در برخی گراف‌ها می‌تواند بسیار مشکل باشد و در طرح سؤالات همواره به چگونگی ارائهٔ استدلال توسط دانش‌آموزان باید دقت نمود.

حل تمرین‌های درس دوم صفحه ۵۲

۱

الف) اگر این گراف را (گراف شکل ۴ صفحهٔ ۴۶) G بنامیم، ادعا می‌کنیم $\gamma(G) = ۳$ برای این کار باید دو موضوع را نشان دهیم.

۱ــ۱) یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی وجود دارد.

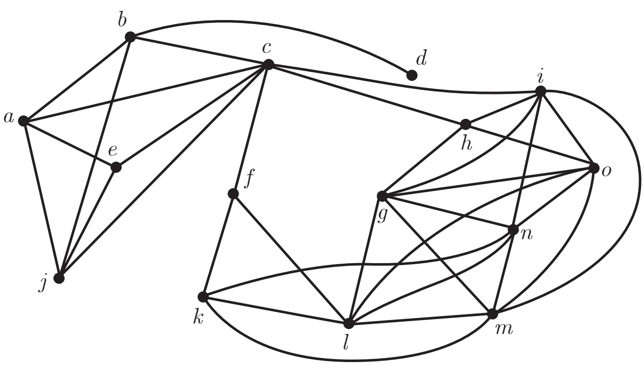
۲ــ۱) هیچ مجموعهٔ احاطه‌گر ۲ عضوی وجود ندارد یا به‌عبارتی هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواهی حداقل ۳ عضو دارد.

حل : ۱ــ۱) به سادگی دیده می‌شود که مجموعهٔ $\{i , d , g\}$ برای گراف G یک مجموعهٔ احاطه‌گر است لذا داریم $\gamma(G) \leq ۳$.

حل : ۲ــ۱) فرض کنیم $D \subseteq \gamma(G)$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه برای G باشد. نشان می‌دهیم D حداقل سه عضو دارد. برای احاطه‌شدن رأسِ j حداقل یکی از رئوس i و j و k باید درمجموعهٔ S قرار داشته باشند. هر کدام از رئوس مذکور که در S باشند حداکثر ۴ رأسِ i و j و k و a را احاطه می‌کنند و سایر رئوس گراف احاطه نشده باقی می‌مانند و از طرفی چون هیچ رأسی به تمام رئوسِ باقی‌ماندهٔ گراف (سایر رئوس به‌جز i و j و k و a) وصل نیست پس هیچ رأسی به تنهایی نمی‌تواند سایر رئوس گراف را احاطه کند. بنابراین حداقل دو رأسِ دیگر نیز باید در S وجود داشته باشد. پس $|S| \geq ۳$، یعنی هیچ مجموعه‌ای با اندازهٔ کوچک‌تر از ۳ نمی‌تواند برای این گراف احاطه‌گر باشد پس $\gamma(G) \geq ۳$. حال با توجه به (I) و (II) داریم $\gamma(G) = ۳$.

ب) اینکه مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در b قرار دهیم بدان معنی است که مجموعهٔ احاطه‌گری با کمترین تعداد ممکن انتخاب کنیم به‌گونه‌ای که رأس b در آن باشد. مجموعهٔ مذکور به‌صورت $\{i , b , g\}$ است و لذا در این حالت هم با ۳ ایستگاه مسئله حل می‌شود.

۲ اگر به ازای هر روستا یک رأس قرار دهیم و دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر روستاهای متناظر با آنها فاصله‌شان کمتر یا مساوی ۱۰ باشد گراف مقابل حاصل خواهد شد. حال کافی است مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم این گراف را به‌دست آوریم.



G

اگر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، برای احاطهٔ رأس d یکی از d و b را باید

شامل شود و در هر حال رئوس i ،f ،g ،h ،k ،l ،m ،n و o باز هم احاطه نشده باقی می‌مانند. چون هیچ رأسی وجود ندارد که به تنهایی همهٔ این ۹ رأس را احاطه کند لذا S باید حداقل ۲ رأس دیگر و در کل حداقل ۳ رأس داشته باشد پس $|S| \geq ۳$ یعنی $\gamma(G) \geq ۳$.

از طرفی $\{b, l, i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی است. پس $\gamma(G) \leq ۳$. یعنی $\gamma(G) = ۳$ و کافی است ۳ بیمارستان در روستاهای b، l و i احداث شود تا شرایط مسئله تأمین شود.

۳ الف) $\{e, c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای آن است، لذا $\gamma(G) \leq ۲$. از طرفی چون رأسی با درجهٔ ۷ وجود ندارد پس هیچ رأس به تنهایی همهٔ رئوس را احاطه نمی‌کند. بنابراین $\gamma(G) \geq ۱$ و لذا $\gamma(G) = ۲$.

ب) $\{e, j\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است و با استدلالی مشابه (الف) ثابت می‌شود که $\gamma(G) = ۲$.

پ) فرض کنیم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد. برای اینکه رأس a احاطه شده باشد باید یکی از رئوس a، b، e و f در S باشند. به‌طور مشابه یکی از رئوس c، d، g و h و نیز یکی از رئوس i، j، k و l باید در S باشند پس S حداقل ۳ عضو دارد و لذا $\gamma(G) \geq ۳$.

از طرفی $\{t, g, i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است پس $\gamma(G) \leq ۳$ و لذا $\gamma(G) = ۳$.

ت) اگر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، باید شامل یکی از اعضای $N(V)$ به‌ازای هر $V \in V(G)$ باشد. لذا برای احاطه‌کردن هر کدام از رئوس بالایی مثلث‌ها باید حداقل یکی از رئوس آن مثلث را شامل شود پس S حداقل ۵ عضو دارد، یعنی $\gamma(G) \geq ۵$.

از طرفی $\{f, i, k, l, n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف مذکور است و لذا $\gamma(G) \leq ۵$. بنابراین داریم $\gamma(G) = ۵$.

ث) فرض کنیم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد. چون این گراف شامل ۴ دور C_5 است و از طرفی از هر کدام از C_5ها حداقل ۲ رأس باید در S باشد (زیرا درغیراین‌صورت همهٔ رئوسِ آن C_5 احاطه نمی‌شوند)، لذا حداقل ۸ رأس باید در S باشد، پس $\gamma(G) \geq ۸$. از طرفی کافی است از هر کدام از C_5ها دو رأسِ غیرمجاور را انتخاب کنیم. مجموعهٔ ۸ عضوی حاصل یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای G است. بنابراین $\gamma(G) \leq ۸$ و لذا $\gamma(G) = ۸$.

۴ اگر داشته باشیم $\gamma(G) = ۱$، این بدین معناست که رأسی در G هست که به همهٔ رئوسِ دیگر گراف G وصل است یا به‌عبارتی G شامل یک ستاره است. در این حالت داریم $\Delta(G) = n - ۱$. اگر گراف G به‌جز این ستاره یال دیگری نداشته باشد، دارای $n - ۱$ یال است که کمترین تعداد ممکن است و در حالتی که تمام رئوس گراف G به هم وصل باشند، G گراف کامل است. در این حالت تعداد یال‌های G برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است که بیشترین تعداد ممکن است.

۵ باتوجه به کران $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ و با توجه به اینکه P_n و C_n هر کدام دارای n رأس‌اند و $\Delta(P_n)=\Delta(C_n)=۲$ لذا داریم :

$$\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil \leq \gamma(P_n) \quad \text{و} \quad \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil \leq \gamma(C_n)$$

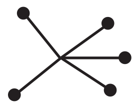
حال در P_n اگر مجموعهٔ S را به این صورت انتخاب کنیم که دومین رأسِ P_n را در آن قرار داده و سپس رئوسِ دیگر را دو تا در میان در S قرار دهیم، S یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای P_n با اندازهٔ $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ خواهد بود و لذا $\gamma(P_n) \leq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$. بنابراین $\gamma(P_n)=\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ و برای C_n نیز کافی است به‌طریقی مشابه رئوس را دوتا در میان در S قرار دهیم و نتیجه‌ای مشابه آنچه برای P_n گفته شد بگیریم.

۶ با توجه به کران $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ و چون در گراف k- منتظم داریم $\Delta=k$ پس $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$

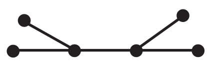
۷ داریم $n=۱۲$ و $\Delta=۲$ پس $۴=\left\lceil \frac{۱۲}{۲+۱} \right\rceil \leq \gamma(G)$. پس کمترین مقدار برای $\gamma(G)$ برابر ۴ است و چنین گرافی می‌تواند $P_{۱۲}$ یا $C_{۱۲}$ باشد.

۸

الف)



ب)



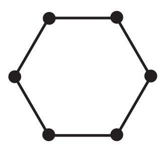
پ) اگر $k \leq \frac{n}{۲}$ باشد کافی است یک مسیر k رأسی درنظر بگیریم و به هر رأس آن یک رأس جدید وصل کنیم سپس دوباره به برخی رئوسِ مسیر k رأسی، رأس‌هایی وصل کنیم تا تعداد رئوس n تا شود.

اگر $k > \frac{n}{۲}$ در این صورت گراف موردنظر نمی‌تواند همبند باشد. می‌توان ۴ تا رأس تنها درنظر گرفت و به برخی از آنها آنقدر رأس جدید وصل کرد که تعداد رئوس n تا شود.

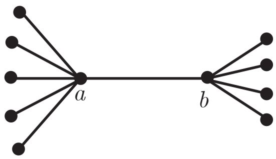
۹

الف) $P_۶$

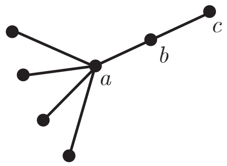
ب) $C_۶$



۱۰

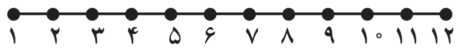


الف) کافی است گرافی مانند شکل مقابل رسم شود به‌گونه‌ای که مجموع رئوس متصل به دو رأس a و b برابر $n-2$ تا شوند.



ب) یک گراف به شکل مقابل رسم می‌کنیم به‌طوری‌که تعداد رئوس متصل به رأس a برابر $n-2$ تا باشد. در این‌صورت $\{a , b\}$ و $\{a , c\}$ دو $\gamma-$ مجموعهٔ متمایز از آن هستند.

۱۱



الف) {۲ , ۵ , ۸ , ۱۱} یک $\gamma-$ مجموعهٔ آن است.

ب) {۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹ , ۱۱} یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی آن است.

فصل سوم

ترکیبیّات (شمارش)

نگاه کلی به فصل

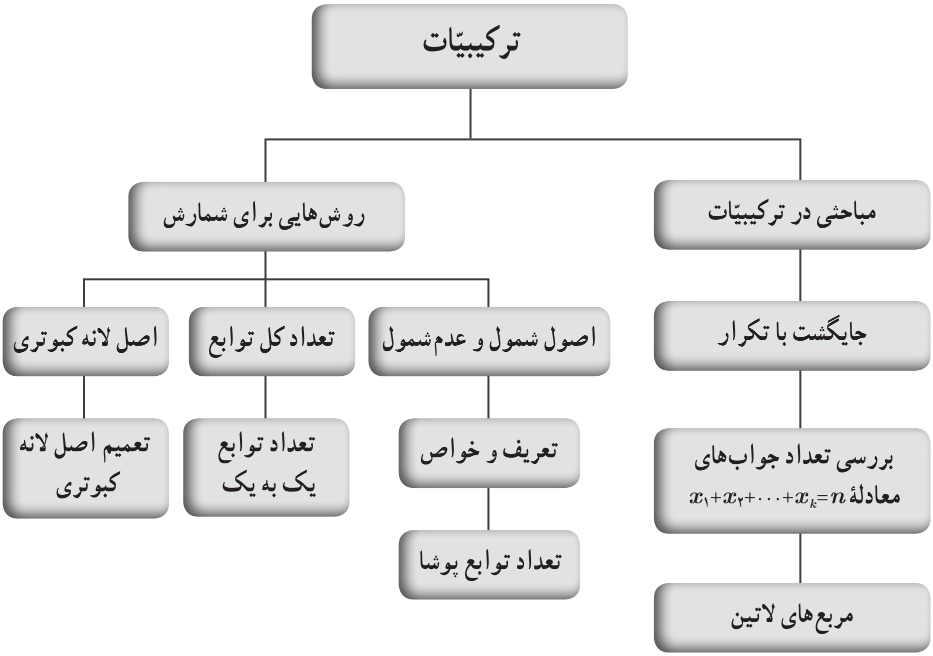
در ترکیبیّات یا علم شمارش در سطوح مقدماتی، فقط از اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش استفاده می‌شود، حال آنکه شمارش می‌تواند توسط ابزارهای دیگر یا اصول دیگری نیز انجام شود. در این فصل، اصول دیگری برای حل مسائل شمارشی مانند اصل شمول و عدم‌شمول و اصل لانه کبوتری و تعمیم آن معرفی می‌شوند.

فصل ۳ کتاب ریاضیات گسسته به موضوع ترکیبیات پرداخته شده است. این فصل شامل دو درس است.

در درس اول، مباحثی در ترکیبیّات بیان می‌شود. ابتدا برخی از ابزارهای شمارشی که دانش‌آموزان در سال‌های قبل با آنها آشنا شدند با ارائه مثال‌هایی یادآوری می‌شود و قضیه جایگشت با تکرار همراه با سؤالاتی متنوع مطرح می‌گردد. سپس تعیین تعداد جواب‌های حسابی یا طبیعی معادله سیاله خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد و در ادامه مربع‌های لاتین معرفی می‌شوند. مربع‌های لاتین که کاربردهای ملموسی در حل مسائل دنیای واقعی دارند، زمینهٔ مناسبی برای پرورش تفکر ریاضی و استدلال، به‌ویژه ارتقای استدلال کلاسی در دانش‌آموزان هستند.

موضوع درس دوم، در مورد روش‌هایی برای شمارش است. ابتدا اصل شمول و عدم‌شمول معرفی شده و کاربرد آن در حل برخی از مسائل و تعیین تعداد توابع پوشا مطرح می‌گردد. همچنین تعیین تعداد کل توابع و تعداد توابع یک به یک بیان شده است. سپس به معرفی اصل لانه کبوتری و تعمیم آن و کاربردشان در حل مسائل و حل مسائلی از دنیای واقعی همراه با سؤالات متنوعی پرداخته شده است.

نقشه مفهومی درس‌های ۱ و ۲ فصل سوم



دانستنی‌های معلم

امروزه ترکیبیّات یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است که سریعاً در حال رشد و گسترش می‌باشد. یکی از علل رشد سریع ترکیبیّات، ورود کامپیوتر در صحنه علم و جامعه است، چون اساس برنامه‌های کامپیوتری معمولاً الگوریتم‌های ترکیبیّاتی می‌باشند.

ریاضی‌دانان چینی، هندی و یونانی از قرن نخست میلادی با فرمول‌های مربوط به آرایش‌ها و ترکیب‌ها آشنایی داشتند.

کار ترکیبیّات مطالعه مجموعه‌های متناهی از اشیا و ساختارهای روی آنها، نظیر جایگشت‌ها، ترکیب‌ها و . . . است. در مطالعه این‌گونه مجموعه‌ها و ساختارهای روی آنها، سه مسئله عمده مورد بررسی قرار می‌گیرد :

الف) مسئله وجودی : گاهی اوقات وجود شیء با ویژگی‌های خاص به راحتی معلوم نمی‌شود. اگر وجود این شیء همیشه امکان ندارد، طبیعی است سؤال کنیم تحت چه شرایطی شیء مورد نظر وجود خواهد داشت.

ب) مسئله شمارش : یکی از قسمت‌های مهم و جالب ترکیبیّات، روش‌های شمارش در آن است، که بعضاً روش ترکیبیّاتی یا شمارش بدون شمردن نامیده می‌شود. شمارش بدون شمردن به سه طریق ممکن است صورت گیرد. فرض کنید می‌خواهیم تعداد اعضای مجموعه متناهی A را تعیین کنیم :

۱ــ ارائه الگویی از مسئله و تعبیر دوگانه و معادل آن

۲ــ برقرار نمودن تناظری یک به یک میان مجموعه A و مجموعه‌ای مانند B که تعداد اعضای آن را می‌دانیم.

۳ــ افراز مجموعه A به چند مجموعه جدا از هم مانند A_1، A_2، . . . و A_k به‌طوری که شمارش اعضای این مجموعه‌ها ساده یا تعداد اعضای آنها از قبل معلوم باشد، و جمع کردن تعداد اعضای آنها.

ج) مسئله بهینه‌سازی : در این قسمت با ارائه بهترین الگوریتم‌ها برای ساخت یک ترتیب، که وجود آن ثابت شده است، با حداقل عملیات و با وضوح کامل روبه‌رو هستیم. اکثر الگوریتم‌های موجود در ترکیبیّات حتی با کامپیوتر هم زمان زیادی را می‌گیرند تا به نتیجه برسند و برای بعضی از مسائل کاربردی هنوز الگوریتم کارا وجود ندارد.

درس اول

مباحثی در ترکیبیّات

اهداف

۱ یادآوری ابزارهای شمارش اصل جمع و اصل ضرب و روش‌های شمارش تبدیل و ترکیب
۲ آشنایی با قضیه جایگشت با تکرار
۳ به‌کارگیری قضیه جایگشت با تکرار در حل برخی از مسائل شمارشی
۴ توانایی در طرح مسائلی که با اصل ضرب و به روش دسته‌بندی حل می‌شوند.
۵ تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیاله خطی $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$
۶ تعیین تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ سیاله خطی $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$
۷ معادل سازی برخی مسائل از دنیای واقعی به فرم معادله سیاله خطی و تعیین تعداد جواب‌های آنها
۸ آشنایی با مفهوم مربع‌های لاتین و درک خواص مقدماتی آنها
۹ استفاده از مربع‌های لاتین در حل مسائل کاربردی

روش تدریس

در شروع درس، ابزارهای شمارش اصل جمع و اصل ضرب و روش‌های شمارش مانند تبدیل r شیء از n شیء و ترکیب r شیء از n شیء و به‌کارگیری از آنها در حل برخی از مسائل شمارشی با ارائه مثال‌هایی یادآوری می‌شود. منظور از این یادآوری این است که به اهداف ما برای رسیدن به مفاهیم و مباحث جدید شمارشی کمک کند. با نتیجه‌گیری از مسئله مطرح شده در صفحه ۵۸، جایگشت با تکرار به‌صورت قضیه بیان می‌شود و مثال‌هایی برای درک بهتر این مفهوم برای دانش‌آموزان مطرح شده است.

در صفحه ۵۹، فعالیتی بیان شده است که با استفاده از مفهوم ترکیب و قضیه جایگشت با تکرار، به حل آن می‌پردازد و مسئله مطرح شده را در حالت کلی بررسی می‌کند، سپس با نتیجه‌ای که از قسمت قبل

می‌گیرد، تعداد جایگشت‌ها را در حالت کلی تعمیم می‌دهد. در قسمت ۴ این فعالیت، چون برای انتخاب n گل از k نوع گل، تکرار مجاز است، بنابراین جابه‌جایی ستاره‌ها با هم (انتخاب هر نوع گل) یعنی $n!$ و جابه‌جایی خط‌های عمودی با هم یعنی $(k-۱)!$، دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند، لذا تعداد کل جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌های تکراری که ستاره‌ها و خط‌های عمودی جابه‌جا می‌شوند تقسیم می‌کنیم که مساوی است با :

$$\frac{(n+k-۱)!}{n!\times(k-۱)!}=\binom{n+k-۱}{n}=\binom{n+k-۱}{k-۱}$$

سپس برای درک بهتر و یادگیری دانش‌آموزان، مثال‌هایی مطرح شده است.

هدف از فعالیت صفحه ۶۰، معادل‌سازی مسئله «تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین ۳ نوع گل»، به فرم معادله سیاله خطی $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ است، تا تعداد جواب‌های این معادله که همان تعداد انتخاب‌های اشاره شده در مسئله می‌باشد را به‌دست آورد، که برابر است با :

$$\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۷+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}=۳۶$$

با نتیجه‌گیری از این فعالیت، فرمول $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ را برای تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی (حسابی) معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ معرفی می‌کند.

حل کار در کلاس صفحه ۶۱ کتاب

۱ ابتدا از هر نوع گل، ۱ شاخه برداشته، لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه ۴=۳−۷ می‌شود. اگر منظور از y_i همان x_i باشد که یک شاخه از آن برداشته شده، پس معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ به معادله $y_۱+y_۲+y_۳=۴$ تبدیل می‌شود، با این تفاوت که شرط‌های معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۷$، $x_i\geq ۱$ $(i=۱,۲,۳)$ است و شرط‌های معادله $y_۱+y_۲+y_۳=۴$، $y_i\geq ۰$ $(i=۱,۲,۳)$ می‌باشد. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_۱+y_۲+y_۳=۴$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۴ شاخه گل از بین ۳ نوع گل، یعنی :

$$\binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵$$

نتیجه : برای تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$، درصورتی‌که $x_i\geq a_i$، که در آن $۱\leq i\leq k$ و همچنین a_i یک عدد طبیعی مشخص است تغییر متغیر می‌دهیم :

$$y_i=x_i-a_i\geq ۰ \Rightarrow x_i=y_i+a_i$$

سپس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ای که برحسب y_i تنظیم شده به‌دست می‌آید.

۲ ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته، لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ به‌صورت $y_۱+y_۲+\cdots+y_k=n-k$ تبدیل می‌شود. یعنی تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_۱+y_۲+\cdots+y_k=n-k$ برابر است. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_۱+y_۲+\cdots+y_k=n-k$ به‌صورت زیر خواهد بود :

$$\binom{(n-k)+k-۱}{k-۱}=\binom{n-۱}{k-۱}$$

یعنی تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-۱}{k-۱}$.

۳

$$x_۱>۱\Rightarrow x_۱\geq ۲\Rightarrow x_۱-۲\geq ۰\xrightarrow{y_۱=x_۱-۲}y_۱\geq ۰, x_۱=y_۱+۲$$

$$x_۳>۳\Rightarrow x_۳\geq ۴\Rightarrow x_۳-۴\geq ۰\xrightarrow{y_۳=x_۳-۴}y_۳\geq ۰, x_۳=y_۳+۴$$

$$\Rightarrow y_۱+۲+x_۲+y_۳+۴+x_۴+x_۵=۱۴\Rightarrow y_۱+x_۲+y_۳+x_۴+x_۵=۸$$

$$\Rightarrow\binom{۸+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۲}{۴}=۴۹۵$$

۴ با توجه به شرط مسئله $(x_i\geq ۱\ ,\ ۱\leq i\leq ۵)$ و فرمول سؤال ۲ این کار در کلاس داریم :

$$\binom{۱۱-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}=۲۱۰$$

۵

$$x_۳=۴$$

$$x_۵>۲\Rightarrow x_۵-۲>۰\xrightarrow{y_۵=x_۵-۲}y_۵>۰, x_۵=y_۵+۲$$

$$x_۱+x_۲+۴+x_۴+y_۵+۲+x_۶=۱۲$$

$\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۴+y_۵+x_۶=۶\Rightarrow$ با توجه به فرمول سؤال ۲: $\binom{۶-۱}{۵-۱}=\binom{۵}{۴}=۵$

ارائهٔ تعریف مربع لاتین می‌تواند به‌طور مستقیم صورت بگیرد و نیز می‌توان مانند آنچه در صفحهٔ ۶۲ صورت گرفته است با طرح یک سؤال دانش‌آموزان را به سمت این مفهوم سوق داد. مطمئن شوید دانش‌آموزان مفهوم مربع لاتین را فهمیده‌اند و خواصی از آن را که در کتاب مطرح شده است مانند «تعویض جای دو سطر (یا دو ستون) مربع لاتین بودن را حفظ می‌کند» و یا «اعمال یک جایگشت بر اعضای یک مربع لاتین، مربع لاتین بودن را حفظ می‌کند» را با درک علت آن فهمیده‌اند. توجه کنید که یکی از اهداف

این درس ارتقای سطح استدلال کلامی دانش‌آموزان است، لذا از دانش‌آموزان بخواهید که استدلال‌های موردنظر را به‌صورت شفاهی بیان نمایند. در این بخش توجه داشته باشید که سؤالات انحرافی بسیاری مانند اینکه «در حالت کلی چند مربع لاتین $n \times n$ داریم» و غیره می‌توان مطرح نمود که جزء اهداف درسی این کتاب نیستند.

در تعریف دو مربع لاتین متعامد، معمولاً گفته می‌شود از کنار هم قرار گرفتن درایه‌های نظیر به نظیر، زوج مرتب‌هایی حاصل می‌شود اما در این کتاب برای راحت‌تر درک کردن دانش‌آموزان و از آنجا که مربع‌های لاتینِ با مرتبهٔ ۲ رقمی در این کتاب مطرح نشده‌اند به‌جای زوج مرتب، اعداد دو رقمی گفته شده است.

مطمئن شوید که دانش‌آموزان اینکه متعامد بودن دو مربع در حل مسائل دقیقاً کجا به‌کار می‌آید را متوجه شده‌اند.

مطالب خواندنی آورده شده در صفحهٔ ۶۷ می‌تواند به جهات مختلف برای دانش‌آموزان جالب باشد. گرچه این مطلب به‌عنوان خواندنی آمده و طبیعتاً در امتحان از آن سؤال مطرح نمی‌شود اما این مطلب که دانش‌آموزان بدانند مجهولاتِ مفهومی به ظاهر در طول سال‌ها چندین ریاضی‌دان را به خود مشغول کرده است و حتی اویلر در این زمینه حدس اشتباه زده است می‌تواند این ذهنیت غلط را که ریاضیات صرفاً توسط چند نابغه که همه چیز را می‌دانسته‌اند به‌وجود آمده است، در آنها مرتفع سازد.

برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ فرد شیوه‌های دیگری هم هست که در این کتاب مطرح نشده است. برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ زوج نیز شیوه‌هایی ارائه شده است که در این کتاب طرح آنها مدنظر نیست. لذا اگر در ارزشیابی سؤالی مطرح شود که نیاز به دو مربع لاتین مرتبهٔ زوج داشته باشد باید دو مربع لاتین متعامد نیز ارائه شوند. در سؤالات ارزشیابی، با تغییر عامل‌های سؤال مطرح شده دربارهٔ کارخانهٔ ریسندگی می‌توانید سؤال‌های کاربردی مختلفی ارائه کنید که برنامه‌ریزی برای آنها توسط دو مربع لاتین متعامد انجام شود.

توصیه آموزشی

- ❑ به پیش‌نیازهای مبحث درس توجه شود و در کلاس با روش پرسش و پاسخ با دانش‌آموزان، مفاهیمی که قبلاً آموخته‌اند، مرور و یادآوری گردد تا مباحث جدید و مرتبط را بهتر درک کنند.
- ❑ طرح سؤالاتی برای معادلات سیاله که شرط‌هایی برای x_iها به‌صورت $a \leq x_i \leq b$ در آن لحاظ شده باشد، در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نمی‌باشد.
- ❑ به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل دشوار اجتناب گردد.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

❑ در حل مسئله‌ای که از قضیه جایگشت با تکرار استفاده می‌شود، ممکن است تعداد تکرارها را نادرست شمرده باشد.

❑ عدم درک درست از مفاهیم ترکیبیّاتی و به‌کارگیری نادرست از آنها در حل مسائل شمارشی.

❑ هنگام معادل‌سازی مسئله‌ای از دنیای واقعی به فرم معادله سیاله خطی، ممکن است دچار اشتباه شود.

❑ برای تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی (حسابی) یا تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله سیاله خطی، به شرط‌های داده شده در مسئله دقت نمی‌کند، که در صورت لزوم با تعویض کدام متغیرها بتواند مسئله را به شرایط مورد نظر رسانده و با استفاده از فرمول، تعداد جواب‌های معادله را به‌دست آورد.

حل تمرینات درس اول صفحه ۷۲ کتاب

۱ هر دو برادری که رو به روی هم نشستند را در یک دسته در نظر می‌گیریم، پس ۴ دسته داریم و تعداد جایگشت‌ها می‌شود !۴، از طرفی در هر دسته، هر دو برادری که رو به روی هم نشستند هم جایگشت دارند که برابر است با !۲. بنابراین طبق اصل ضرب داریم : $(۲!)^۴ \times ۴!$

۲ تعداد جایگشت‌های کد ۵ رقمی برابر !۵ است. از طرفی با توجه به تعداد حالات انتخاب ارقام از مجموعه‌های A و B داریم : $۵! \times \binom{۵}{۳} \times \binom{۴}{۲}$

۳ الف) !۹

ب) $۶! \times ۴!$

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند، پس باید در قفسه، کتاب‌ها را یک در میان بچینیم.

۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی

طبق اصل ضرب داریم : $۵! \times ۴!$

ت) $۳! \times ۷!$

۴ ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند، اگر بخواهیم دانش‌آموزان پایه دوازدهم همواره کنار هم باشند؟

۵
$$\frac{6!}{2!\times 3!}$$

۶
$$\frac{9!}{3!\times 2!\times 3!}$$

۷
$$\frac{7!}{2!\times 2!\times 3!}$$

۸ الف)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11\Rightarrow\binom{11+5-1}{5-1}=\binom{15}{4}=1365$$

ب)

$$\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}=210$$

پ)

$$x_2\ge 2\Rightarrow x_2-2\ge 0\xrightarrow{y_2=x_2-2}y_2\ge 0,\ x_2=y_2+2$$
$$x_5>3\Rightarrow x_5\ge 4\Rightarrow x_5-4\ge 0\xrightarrow{y_5=x_5-4}y_5\ge 0,\ x_5=y_5+4$$
$$\Rightarrow x_1+y_2+2+x_3+x_4+y_5+4=11$$
$$\Rightarrow x_1+y_2+x_3+x_4+y_5=5\Rightarrow\binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4}=126$$

ت)

$$x_3=0$$
$$x_4\ge 5\Rightarrow x_4-5\ge 0\xrightarrow{y_4=x_4-5}y_4\ge 0,\ x_4=y_4+5$$
$$\Rightarrow x_1+x_2+0+y_4+5+x_5=11$$
$$\Rightarrow x_1+x_2+y_4+x_5=6\Rightarrow\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84$$

۹ الف)

$$2\le i\le 5\to i=2,3,4,5$$
$$x_i>0\Rightarrow x_i\ge 1\to x_i-1\ge 0\xrightarrow{y_i=x_i-1}y_i\ge 0,\ x_i=y_i+1$$
$$\Rightarrow x_1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=10$$
$$\Rightarrow x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6\Rightarrow\binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}=210$$

ب)

$$x_1>2\Rightarrow x_1\ge 3\Rightarrow x_1-3\ge 0\xrightarrow{y_1=x_1-3}y_1\ge 0,\ x_1=y_1+3$$
$$x_5\ge 4\Rightarrow x_5-4\ge 0\xrightarrow{y_5=x_5-4}y_5\ge 0,\ x_5=y_5+4$$

$$\Rightarrow y_۱+۳+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵+۴+x_۶=۱۲$$

$$\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵+x_۶=۵\Rightarrow\binom{۵+۶-۱}{۶-۱}=\binom{۱۰}{۵}=۲۵۲$$

پ)

$$۱\leq i\leq ۵\rightarrow i=۱,۲,۳,۴,۵$$

$$x_i\geq ۱\Rightarrow x_i-۱\geq ۰\xrightarrow{y_i=x_i-۱} y_i\geq ۰,\ x_i=y_i+۱$$

$$\Rightarrow y_۱+۱+y_۲+۱+y_۳+۱+y_۴+۱+y_۵+۱=۱۱$$

$$\Rightarrow y_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۶\Rightarrow\binom{۶+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}=۲۱۰$$

ت)

$$\begin{cases} x_۲=۰\Rightarrow x_۱+۰+x_۳+x_۴=۷\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۷\Rightarrow\binom{۷+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}=۳۶\\ x_۲=۱\Rightarrow x_۱+۳+x_۳+x_۴=۷\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۴\Rightarrow\binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵\\ x_۲=۲\Rightarrow x_۱+۶+x_۳+x_۴=۷\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۱\Rightarrow\binom{۱+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۳}{۲}=۳ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌ها = ۳۶ + ۱۵ + ۳ =۵۴

ث)

$$\begin{cases} x_۲=۰\Rightarrow x_۱+۰+x_۳+x_۴=۳\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۳\Rightarrow\binom{۳+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰\\ x_۲=۱\Rightarrow x_۱+۱+x_۳+x_۴=۳\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۲\Rightarrow\binom{۲+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۴}{۲}=۶\\ x_۲=۴\Rightarrow x_۱+۲+x_۳+x_۴=۳\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۱\Rightarrow\binom{۱+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۳}{۲}=۳\\ x_۲=۹\Rightarrow x_۱+۳+x_۳+x_۴=۳\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۰\Rightarrow\binom{۰+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۲}{۲}=۱ \end{cases}$$

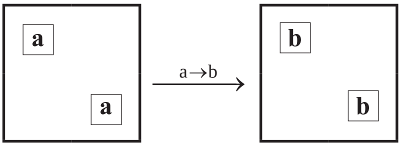
$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌ها =۱۰ + ۶ +۳ + ۱ =۲۰

۱۰

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳=۵\\ x_i\geq ۰,\ i=۱,۲,۳ \end{cases}\Rightarrow\binom{۵+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

۱۱

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸\\ x_i\geq ۱,\ i=۱,۲,۳,۴ \end{cases}\Rightarrow\binom{۸-۱}{۴-۱}=\binom{۷}{۳}=۳۵$$



۱۲ خیر ــ مثلاً اگر تمام ۱ها به ۲ تبدیل شده باشند، در این صورت در جایگاهی متناظر آنها اعداد تکراری ۱۲ به‌وجود می‌آید.

۱۳ الف)

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

$\longrightarrow A_1 =$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

بله متعامدند

ب)

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

$\longrightarrow$

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

$\longrightarrow A_2 =$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

خیر متعامد نیستند زیرا مثلاً در جایگاه‌های سطر اول ستون اول و سطر دوم ستون سوم عدد دورقمی ۳۲ تکرار می‌شود.

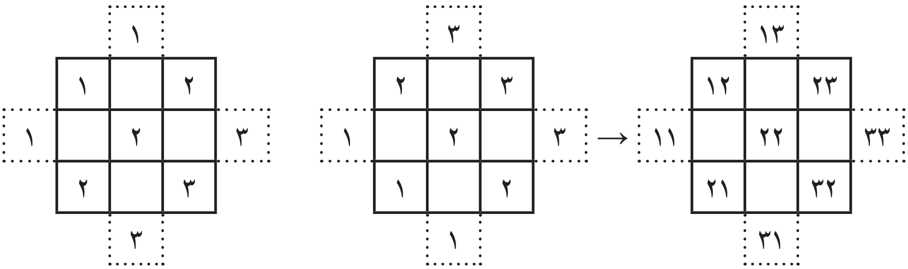
پ) ۱ــ خیر ۲ــ خیر

۱۴ کافی است از یک مربع لاتین ۶×۶ استفاده کنیم. جلسات را با S_1 , S_2 , . . . و S_6 نمایش می‌دهیم.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
S_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
S_2	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
S_3	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
S_4	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
S_5	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
S_6	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1

لذا به‌طور مثال مدرس T_1 در جلسهٔ اول به کلاس C_1 می‌رود.

۱۵



۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

→

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

→

۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

با همین روش دو مربع لاتین از مرتبهٔ ۷ ساخته می‌شود.

۱۶ با روش توضیح داده شده در صفحهٔ ۷۰ می‌توان دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ به‌دست آورد که با نوشتن آنها در یک مربع و نمایش راننده‌ها با d_1 ، . . . و d_7 و نمایش روزهای هفته با s_1 ، . . . و s_7 و نمایش ماشین‌ها با اعداد سمت چپ و نمایش جاده‌ها با اعداد سمت راست، خواهیم داشت :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
d_1	۱۲	۲۳	۳۴	۴۵	۵۶	۶۷	۷۱
d_2	۷۳	۱۴	۲۵	۳۶	۴۷	۵۱	۶۲
d_3	۶۴	۷۵	۱۶	۲۷	۳۱	۴۲	۵۳
d_4	۵۵	۶۶	۷۷	۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
d_5	۴۶	۵۷	۶۱	۷۲	۱۳	۲۴	۳۵
d_6	۳۷	۴۱	۵۲	۶۳	۷۴	۱۵	۲۶
d_7	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۶۵	۷۶	۱۷

بنابراین به‌طور مثال رانندهٔ d_1 در روز s_1 با ماشین شمارهٔ ۱ و در جادهٔ شمارهٔ ۲ رانندگی می‌کند.

درس دوم

روش‌هایی برای شمارش

اهداف

۱ آشنایی با مفهوم اصل شمول و عدم‌شمول
۲ به‌کارگیری اصل شمول و عدم‌شمول در حل مسائل ترکیبیّاتی
۳ آشنایی با مفهوم توابع پوشا و یافتن تعداد آنها به کمک اصل شمول و عدم‌شمول
۴ به‌کارگیری مفهوم اصل ضرب برای یافتن تعداد کل توابع
۵ به‌کارگیری مفهوم تبدیل r شیء از n شیء برای یافتن تعداد توابع یک به یک
۶ مهارت در ارائه الگویی از مسئله و تعبیر معادل آن
۷ آشنایی با مفهوم اصل لانه کبوتری و به‌کارگیری آن در حل برخی از مسائل
۸ آشنایی با مفهوم تعمیم اصل لانه کبوتری و به‌کارگیری آن در حل برخی از مسائل
۹ توانایی در طرح مسائلی که با اصل لانه کبوتری حل می‌شوند.

روش تدریس

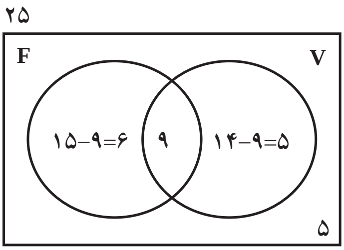
یکی از تکنیک‌های بسیار مهم در حل مسائل ترکیبیّاتی، اصل شمول و عدم‌شمول است. دانش‌آموزان از سال‌های قبل، با نظریه مجموعه‌ها آشنایی دارند. بهتر است قبل از ورود به موضوع درس، با روش پرسش و پاسخ در کلاس، مفاهیم $A\cup B$ و $A\cap B$ و $A-B$ و A' برای آنها یادآوری شود، سپس به معرفی اصل شمول و عدم‌شمول پرداخت.

واضح است که تساوی $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ اصل شمول است و تساوی $|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$ اصل عدم‌شمول، چون $\overline{A\cup B}$ هیچ یک از ویژگی‌های اعضای A و B را شامل نمی‌شود.

در ابتدای درس، اصل شمول و عدم‌شمول را برای دو مجموعه متناهی بیان می‌کند و سپس این اصل را برای سه مجموعه متناهی بسط می‌دهد. در کتاب برای درک بهتر و یادگیری دانش‌آموزان، نمودار ون برای

دو مجموعه متناهی و برای سه مجموعه متناهی که با هم در اشتراک هستند، رسم شده است. واضح است اگر A و B دو مجموعه متناهی جدا از هم باشند، داریم : $|A\cup B|=|A|+|B|$

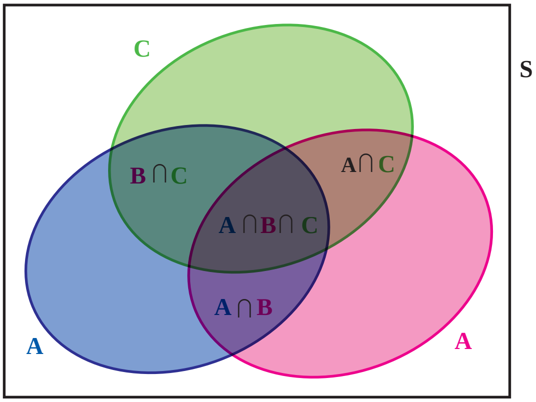
در صفحه ۷۴، مثالی مطرح شده است که دانش‌آموزان در کتاب ریاضی (۱) پایه دهم، در مبحث تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه، با این‌گونه سؤالات آشنایی دارند و برای حل آن، یا از روش نموداری (رسم نمودار ون) یا از قانون $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ استفاده می‌کردند.



برای اینکه برایشان یادآوری شود، از دانش‌آموزان بخواهیم قبل از استفاده از اصل شمول و عدم‌شمول، با رسم نمودار ون پاسخ مثال صفحه ۷۴ را به‌دست آورند. مانند روبه‌رو :

سپس با کمک از اصل شمول و عدم‌شمول، حل این مثال را در کتاب تکمیل نمایند.

در صفحه ۷۵، اصل شمول برای سه مجموعه متناهی بیان شده است و برای دلایل برقراری تساوی آن، از دانش‌آموزان خواسته شده، با کمک نمودار ون به سؤال پاسخ دهند. بهتر است از دانش‌آموزان بخواهیم در نمودار ون، نواحی اشتراک را با نماد مجموعه‌ها نشان دهند. مانند نمودار ون زیر :



$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه، یعنی تعداد اعضایی که حداقل به یکی از سه مجموعه تعلق دارند.
با توجه به نمودار ون، در جمع تعداد اعضای مجموعه‌های A، B و C، هر عضو متعلق به اشتراک دوتایی مجموعه‌ها به‌طور تکراری به حساب آمده، پس اشتراک دوتایی‌ها باید یک بار کم شوند. همچنین در جمع تعداد اعضای هر سه مجموعه، اشتراک سه تایی آنها، سه بار حساب شده بود و وقتی اشتراک‌های دوتایی

را کم می‌کنیم، هر سه بار حذف می‌شود، پس باید یک اشتراک سه تایی اضافه کنیم.

سپس با استفاده از تعریف متمم، اصل عدم‌شمول یعنی تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A، B و C تعلق ندارند، بیان می‌شود. برای نشان دادن کاربرد اصل شمول و عدم‌شمول، فعالیتی مطرح شده است.

تکمیل فعالیت صفحه ۷۵

۱ ۱۳

۲ خیر، چون بر اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش‌پذیر است.

۳ مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیر نیستند را $\overline{A}$ و مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش‌پذیر نیستند را $\overline{B}$ و مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش‌پذیر نیستند را $\overline{C}$ تعریف می‌کنیم.

۴ بله، طبق قانون دمورگان به‌طور کلی داریم: $\overline{\bigcup A_i} = \bigcap \overline{Ai}$

$$\overline{A\cup B\cup C} = \overline{(A\cup B)\cup C} = \overline{(A\cup B)}\cap \overline{C} = \overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

۵

$$A = \{۱ \le n \le ۴۰۰ | ۳ \mid n\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۴۰۰}{۳}\right] = ۱۳۳$$

$$B = \{۱ \le n \le ۴۰۰ | ۴ \mid n\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۴۰۰}{}\right] = ۱۰۰$$

$$C = \{۱ \le n \le ۴۰۰ | ۵ \mid n\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۴۰۰}{۵}\right] = ۸۰$$

$$|A\cap B| = \left[\frac{۴۰۰}{[۳,۴]}\right] = \left[\frac{۴۰۰}{۱۲}\right] = ۱۳۳ \qquad |A\cap C| = \left[\frac{۴۰۰}{[۳,۵]}\right] = \left[\frac{۴۰۰}{۱۵}\right] = ۲۶$$

$$|B\cap C| = \left[\frac{۴۰۰}{[۴,۵]}\right] = \left[\frac{۴۰۰}{۲۰}\right] = ۲۰ \qquad |A\cap B\cap C| = \left[\frac{۴۰۰}{[۳,۴,۵]}\right] = \left[\frac{۴۰۰}{۶۰}\right] = ۶$$

$$|A\cup B\cup C| = ۱۳۳ + ۱۰۰ + ۸۰ - ۳۳ - ۲۶ - ۲۰ + ۶ = ۲۴۰$$

$$\Rightarrow |\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = |\overline{A\cup B\cup C}| = |S| - |A\cup B\cup C| = ۴۰۰ - ۲۴۰ = ۱۶۰$$

نکته مطرح شده در این فعالیت را می‌توان در حالت کلی بیان نمود، یعنی تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی k که بر عدد a بخش‌پذیر باشند برابر $\left[\frac{k}{a}\right]$ است و تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی k که هم بر عدد a و هم بر عدد b بخش‌پذیر باشند برابر $\left[\frac{k}{[a,b]}\right]$ است.

حل کار در کلاس صفحه ۷۶

$$A=\{1\le n\le 350 | 4|n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{350}{4}\right]=87$$

$$B=\{1\le n\le 350 | 5|n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{350}{5}\right]=70$$

$$C=\{1\le n\le 350 | 6|n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{350}{6}\right]=58$$

$$|A\cap B|=\left[\frac{350}{[4,5]}\right]=\left[\frac{350}{20}\right]=17 \qquad |A\cap C|=\left[\frac{350}{[4,6]}\right]=\left[\frac{350}{12}\right]=29$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{350}{[5,6]}\right]=\left[\frac{350}{30}\right]=11 \qquad |A\cap B\cap C|=\left[\frac{350}{[4,5,6]}\right]=\left[\frac{350}{60}\right]=5$$

$$|A\cup B\cup C|=87+70+58-17-29-11+5=163$$

$$\Rightarrow |\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=350-163=187$$

برای درک بهتر دانش‌آموزان از کاربرد اصل شمول و عدم‌شمول، سؤالات متنوعی مطرح شده است و با مباحثی که در فصل‌های قبل خوانده‌اند، مرتبط می‌باشند.

حل کار در کلاس صفحه ۷۷

۱ گراف‌های الف و پ مورد نظرند، چون رأس تنها ندارند و گراف‌های ب و ت را نباید شمرد.

۲ می‌دانیم تعداد کل گراف‌های ساده‌ای که می‌توان با p رأس رسم کرد، برابر است با : $2^{\binom{p}{2}}=2^{\frac{p(p-1)}{2}}$

پس تعداد کل گراف‌های ساده با سه رأس برابر است با : $2^{\binom{3}{2}}=2^{\frac{3(3-1)}{2}}=2^3=8$

۳ A_a : مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای A تنها بماند.

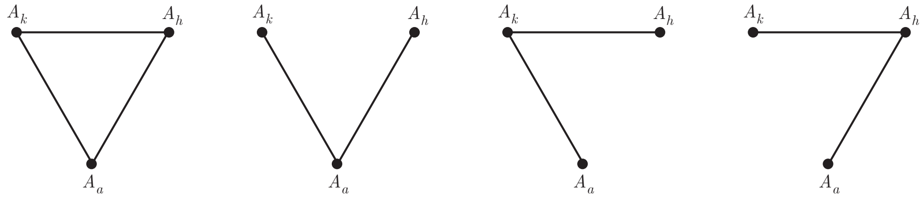
A_h : مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای H تنها بماند.

$$|A_k|=|A_a|=|A_h|=2$$

$$|A_k\cap A_a|=|A_k\cap A_h|=|A_a\cap A_h|=1 \qquad |A_k\cap A_a\cap A_h|=1$$

$$|A_k\cap A_a\cap A_h|=2+2+2-1-1-1+1=4$$

$$\Rightarrow |\overline{A_k} \cap \overline{A_a} \cap \overline{A_h}| = |\overline{A_k \cup A_a \cup A_h}| = |S| - |A_k \cup A_a \cup A_h| = ۸ - ۴ = ۴$$



۴ **الف)** برای محاسبه $|A_k|$، یعنی تعداد طرق جاده‌کشی اگر روستای K تنها بماند، در این حالت روستای K را کنار می‌گذاریم و می‌ماند دو روستای دیگر، که ۱ یال (جاده) بین آنها وجود دارد که آن یال یا می‌تواند باشد و یا می‌تواند نباشد، پس می‌شود ۲ حالت و همین طور داریم : $|A_k|=|A_a|=|A_h|=۲$

ب) برای محاسبه $|A_k \cap A_a|$، یعنی تعداد طرق جاده‌کشی اگر روستاهای K و A تنها بمانند، در این حالت روستاهای K و A را کنار می‌گذاریم، می‌ماند یک روستا، پس می‌شود ۱ حالت و همین طور داریم :

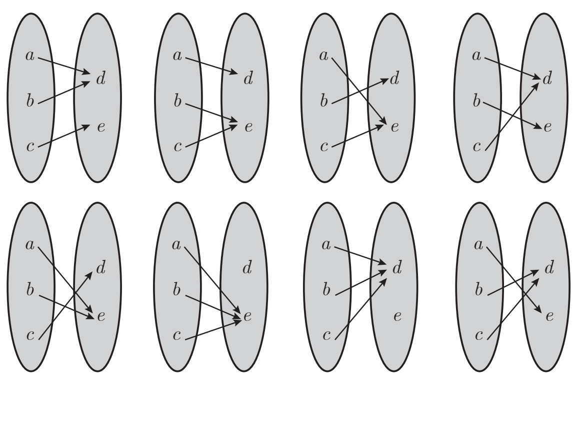
$$|A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = ۱$$

پ) برای محاسبه $|A_k \cap A_a \cap A_h|$، یعنی تعداد طرق جاده‌کشی اگر روستاهای K و A و H تنها بمانند، که باز هم می‌شود ۱ حالت و داریم : $|A_k \cap A_a \cap A_h| = ۱$

فعالیت صفحه ۷۸

قبل از بررسی و تکمیل حل آن، برای جلب توجه دانش‌آموزان از آنها خواسته شود، تعداد توابع یک مجموعه سه عضوی به یک مجموعه دو عضوی را با استفاده از رسم نمودار پیکانی پیدا کنند. مانند زیر :

$$f: \{a,b,c\} \to \{d,e\}$$



پس کلاً ۸ تابع وجود دارد.

با این مثال ساده، دانش‌آموزان درک می‌کنند که شمردن تعداد کل توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی، که تعداد اعضای بیشتری داشته باشند، کار مشکل و زمان‌بری است. حال با استفاده از اصول شمارش و بدون شمردن مستقیم به راحتی می‌توان از رابطه n^m تعداد کل توابع را پیدا نمود.

سپس تابع پوشا معرفی شده است و نشان داده می‌شود که با استفاده از اصل شمول و عدم‌شمول، می‌توان تعداد توابع پوشا را شمارش کرد.

نکته‌ای که دانش‌آموزان باید به آن دقت داشته باشند این است که با توجه به تعریف تابع پوشا، اگر $|A|<|B|$ باشد، هیچ تابع پوشای $f: A\to B$ وجود نخواهد داشت.

در قسمت ۱ فعالیت صفحه ۷۸، تعریفی برای مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ بیان شده است، $A_۱$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۱$ پیکان نمی‌رسد، $A_۲$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۲$ پیکان نمی‌رسد و $A_۳$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۳$ پیکان نمی‌رسد. پس $A_۱\cap A_۲$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۱$ و $b_۲$ پیکان نمی‌رسد و به همین ترتیب، $A_۱\cap A_۳$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۱$ و $b_۳$ پیکان نمی‌رسد و $A_۲\cap A_۳$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۲$ و $b_۳$ پیکان نمی‌رسد و $A_۱\cap A_۲\cap A_۳$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ پیکان نمی‌رسد.

در قسمت ۲ این فعالیت، برای پیدا کردن تعداد اعضای $A_۱$، یعنی تعداد اعضای توابعی که به $b_۱$ پیکان نمی‌رسد، با حذف $b_۱$ از مجموعه B، سؤال شبیه این است که چه تعداد تابع از مجموعه $\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵\}$ به مجموعه $\{b_۲,b_۳\}$ وجود دارد، که برابر است با : $۲^۵$ و به همین صورت واضح است که : $|A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=۲^۵=۳۲$

برای پیدا کردن تعداد اعضای $A_۱\cap A_۲$ ، یعنی تعداد اعضای توابعی که به $b_۱$ و $b_۲$ پیکان نمی‌رسد، با حذف $b_۱$ و $b_۲$ از مجموعه B، سؤال شبیه این است که چه تعداد تابع از مجموعه $\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵\}$ به مجموعه $\{b_۳\}$ وجود دارد، که برابر است با : $۱^۵$ و به همین صورت واضح است که : $|A_۱\cap A_۲|=|A_۱\cap A_۳|=|A_۲\cap A_۳|=۱^۵=۱$

و در آخر $|A_۱\cap A_۲\cap A_۳|=۰$. از طرفی تعداد کل توابع از مجموعه ۵ عضوی به مجموعه ۳ عضوی برابر $۳^۵$ است، یعنی : $|S|=۳^۵=۲۴۳$. بنابراین برای پیدا کردن تعداد اعضای مجموعه $(\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}\cap\overline{A_۳})$ داریم :

$$|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|=۳۲+۳۲+۳۲-۱-۱-۱+۰=۹۳$$
$$\Rightarrow|\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}\cap\overline{A_۳}|=|\overline{A_۱\cup A_۲\cup A_۳}|=|S|-|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|=۲۴۳-۹۳=۱۵۰$$

در ادامه، برای درک بهتر دانش‌آموزان مثال‌های عینی و کاربردی مطرح شده است.

در فعالیت صفحه ۷۹، می‌خواهیم تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را شمارش کنیم. بهتر است تعریف تابع یک به یک از دانش‌آموزان پرسیده شود تا برایشان یادآوری

شود که تابع یک به یک تابعی است که هیچ دو زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم یکسان نداشته باشند.

۱ ۶ راه

۲ ۵ راه، چون f باید یک به یک باشد، وقتی یکی از اعضای مجموعه B برای $f(a_1)$ انتخاب شده، پس ۵ انتخاب برای $f(a_2)$ خواهیم داشت.

۳ به ۴ طریق می‌توان $f(a_3)$ را تعریف کرد.

به ۳ طریق می‌توان $f(a_4)$ را تعریف کرد. $\Rightarrow f(a_4) \neq f(a_1), f(a_4) \neq f(a_2), f(a_4) \neq f(a_3) \Rightarrow f$ یک به یک

بنابراین تعداد کل توابع یک به یک برابر است با : $\frac{6!}{2!} = 3 \times 4 \times 5 \times 6$

سپس با نتیجه‌گیری از این فعالیت، فرمول تعیین تعداد کل توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B که معادل است با یافتن تعداد راه‌های انتخاب m شیء از k شیء، بیان می‌شود و مثالی برای یادگیری دانش‌آموزان مطرح شده است.

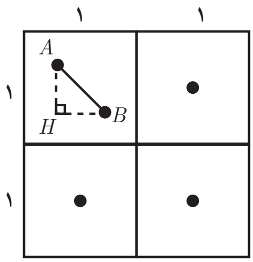
مبحث بعدی درس به معرفی اصل لانه کبوتری پرداخته شده است. اصل لانه کبوتری یکی از ساده‌ترین ابزار برای حل مسائل ترکیبیّاتی می‌باشد و با آنکه صورت ساده‌ای دارد می‌توان مسائل مهم و پیچیده‌ای را با استفاده از این اصل حل نمود، که در واقع بدون استفاده از این اصل، اثبات و حل چنین مسائلی کاری بسیار دشوار خواهد بود. در کتاب برای ایجاد انگیزه یادگیری در دانش‌آموزان، شروع درس با سؤالی مطرح شده است و بهتر است به روش پرسش و پاسخ در کلاس مطرح گردد. سپس اصل لانه کبوتری بیان شده و با سؤالات متنوعی، کاربرد آن در حل مسائل نشان داده می‌شود.

پاسخ تمرین صفحه ۸۱

می دانیم باقی مانده تقسیم هر عدد بر n یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ... یا $n-1$ می‌باشد، که آنها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، پس n لانه داریم. حال اگر $n+1$ عدد طبیعی دلخواه را به‌عنوان کبوترها در نظر بگیریم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این $n+1$ عدد، باقی مانده‌های تقسیمشان بر n با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر n هم باقی‌مانده بوده و بنابر هم‌نهشتی باید $a \overset{n}{\equiv} b$ و حکم به‌دست می‌آید.

حل کار در کلاس صفحه ۸۱

۱ با توجه به شکل، مثلث اصلی یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ تقسیم کرده و آنها را به‌عنوان ۹ لانه در نظر می‌گیریم. اکنون اگر ۱۰ نقطه را به‌عنوان ۱۰ کبوتر تصور کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند، یعنی حداقل دو نقطه در داخل یکی از این مثلث‌ها قرار گرفته و لذا فاصله این دو نقطه از یکدیگر کمتر از ۱ خواهد شد.



۲ مسئله : ۵ نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض‌اند، ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از آنها کمتر از $\sqrt{۲}$ است.

حل :

با توجه به شکل، وسط اضلاع موازی در مربع را به هم وصل کرده تا ۴ مربع به ضلع ۱ ایجاد شود. ۴ مربع کوچک را به‌عنوان ۴ لانه در نظر می‌گیریم. اکنون اگر ۵ نقطه را به‌عنوان ۵ کبوتر تصور کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B وجود خواهند داشت که در داخل یکی از مربع‌ها قرار گیرند. ثابت می‌کنیم که $AB < \sqrt{۲}$.

$AH <$ ضلع مربع کوچک ، $BH <$ ضلع مربع کوچک

$$\Rightarrow \begin{cases} AH < ۱ \\ BH < ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH^{۲} < ۱ \\ BH^{۲} < ۱ \end{cases} \Rightarrow AH^{۲} + BH^{۲} < ۱+۱ \xrightarrow{AH^{۲}+BH^{۲}=AB^{۲}} AB^{۲} < ۲ \Rightarrow AB < \sqrt{۲}$$

۳ چهار فصل سال را به‌عنوان ۴ لانه و افراد یک خانواده ۵ نفری را به‌عنوان ۵ کبوتر در نظر می‌گیریم. با توجه به اصل لانه کبوتری، دست کم دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار می‌گیرند، یعنی دست کم دو نفر از این ۵ نفر وجود دارند که فصل تولدشان یکی است.

۴ حالت (۱)، حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم، که در این صورت درجات رئوس از ۱ تا $p-۱$ تغییر می‌کند. اگر رئوس هر گراف را به‌عنوان کبوترها و درجات رئوس از ۱ تا $p-۱$ را به‌عنوان لانه‌ها در نظر بگیریم، بنابراین تعداد p کبوتر و $p-۱$ لانه داریم که با توجه به اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار بگیرند، یعنی حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

حالت (۲)، حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم، که در این صورت درجات بقیه رئوس از ۱ تا $p-۲$ تغییر می‌کند. چون درجه رأس تنها صفر است و با کنار گذاشتن آن، تعداد $p-۱$ رأس داریم. اگر رئوس گراف را به‌عنوان کبوترها و درجات رئوس از ۱ تا $p-۲$ را به‌عنوان لانه‌ها در نظر بگیریم، بنابراین تعداد $p-۱$ کبوتر و $p-۲$ لانه داریم که با توجه به اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار بگیرند، یعنی حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

نیازی نیست حالتی را برای دو رأس یا بیشتر تنها در نظر بگیریم، چون رأس‌های تنها درجه صفر دارند و کنار گذاشته می‌شوند، بنابراین از تعداد رئوس و تعداد درجات رئوس به یک اندازه کم می‌شود و تعداد رئوس همواره از تعداد درجات بیشتر می‌باشد.

فعالیت صفحه ۸۲، تعمیم اصل لانه کبوتری را به بیانی ساده مطرح می‌کند. مسئله‌هایی برای نشان دادن کاربرد این تعمیم مطرح شده است.

حل کار در کلاس صفحه ۸۳

۱ تعداد لانه‌ها برابر است با تعداد ماه‌های سال ضربدر تعداد روزهای هفته، یعنی : n=۱۲×۷=۸۴، از طرفی : k=۹ → ۱۰=k+۱، پس تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست kn+۱=۸۴×۹+۱=۷۵۷ باشد.

۲

$$k+۱=۵ \rightarrow k=۴$$

$$kn+۱=۵۴ \rightarrow ۴n=۵۳ \rightarrow n=\left[\frac{۵۳}{۴}\right]=۱۳$$

۳ با توجه به اینکه در زبان فارسی ۳۲ حرف وجود دارد، پس طبق اصل ضرب برای تعیین حرف اول و دوم فامیلی غیر تکراری هر فرد حاضر در همایش ۹۹۲=۳۱×۳۲ حالت وجود دارد. حال اگر این حالت‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر بگیریم، یعنی تعداد لانه‌ها برابر است با : n=۹۹۲، از طرفی : k+۱=۳ → k=۲، پس تعداد افراد حاضر در سالن همایش حداقل می‌بایست kn+۱=۲×۹۹۲+۱=۱۹۸۵ باشد.

حل مثال صفحه ۸۳

گرافی تعریف می‌کنیم که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطه دوستی بین هر دو دانش‌آموز، یالی بین رأس‌های متناظرشان باشد، پس درجه هر رأس، تعیین کننده تعداد دوستان دانش‌آموز متناظر با آن رأس خواهد بود. از طرفی می‌دانیم که در هر گراف ساده، حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد، یعنی حداقل دو دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

توصیه آموزشی

❑ بهتر است برای حل فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های کتاب، به روش پرسش و پاسخ با دانش‌آموزان گفت‌وگو شود تا به این طریق آنان تفکرات ریاضی خود را توصیف و سازماندهی کنند و استحکام بخشند و یادگیری مفهومی صورت گیرد.

❑ قبل از ورود به مبحث جدید، پیش‌نیازهای آن مبحث در کلاس برای دانش‌آموزان یادآوری گردد تا ارتباط مفهومی میان مفاهیم ریاضی را به خوبی درک کنند.

❑ در این کتاب، تعمیم اصل شمول و عدم‌شمول برای حداکثر سه مجموعه بیان شده است، این مورد در طرح سؤالات امتحانات و ارزشیابی‌ها رعایت گردد.

❑ سطح سؤالات ارزشیابی، در حد مسائل مطرح شده در کتاب درسی باشد.

اشتباهات رایج دانش آموزان

❑ عدم تشخیص تابع پوشا. به‌عنوان مثال، با توجه به تابع $f: \{a,b,c,d\} \rightarrow \{a,b,c\}$، نمی‌تواند تشخیص دهد $f_1=\{(a,a),(b,c),(c,a),(d,c)\}$ پوشا هست یا نیست.

❑ به این نکته توجه ندارد که در تابع $f: A\rightarrow B$، اگر تعداد اعضای مجموعه A کمتر از تعداد اعضای مجموعه B باشد، امکان ندارد f پوشا باشد.

❑ قبل از پیدا کردن تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B، به شرط $|A|\leq|B|$ دقت نمی‌کند.

❑ معمولاً نمی‌داند که چه زمانی باید از اصل لانه کبوتری استفاده کند و اینکه در مسئله مطرح شده، کبوترها کدام هستند و لانه‌ها کدام، دچار اشتباه می‌شود.

❑ به واژگان کلیدی «حداقل» و «حداکثر» در مسئله توجه ندارد.

حل تمرینات درس دوم صفحه ۸۴ کتاب

۱

$$A=\{1\leq n\leq 90 | 2|n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{90}{2}\right]=45$$

$$B=\{1\leq n\leq 90 | 3|n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{90}{3}\right]=30$$

$$|A\cap B|=\left[\frac{90}{[2,3]}\right]=\left[\frac{90}{6}\right]=15$$

$$\Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=45+30-15=60$$

۲

$$A=\{1\leq n\leq 200 | 4|n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{200}{4}\right]=50$$

$$B=\{1\leq n\leq 200 | 7|n\} \Rightarrow \overline{B}=\{1\leq n\leq 200 | 7\nmid n\}$$

می دانیم : $A\cap\overline{B}=A-(A\cap B)$

$$|A\cap B|=\left[\frac{200}{[4,7]}\right]=\left[\frac{200}{28}\right]=7$$

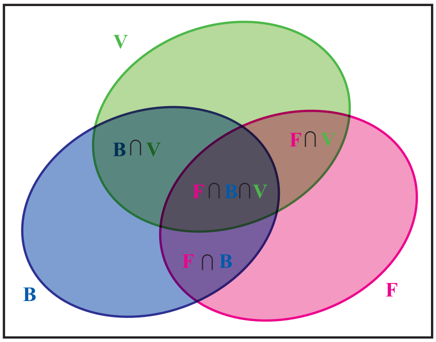
$$\Rightarrow |A\cap\overline{B}|=|A|-|A\cap B|=50-7=43$$

۳ الف) چند نفر هر سه رشتهٔ ورزشی را بازی می‌کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟



$$|F|=۱۵ \ , \ |V|=۱۱ \ , \ |B|=۹ \ , \ |\overline{F}\cap\overline{B}\cap\overline{V}|=۱۰$$
$$|S|=۳۴ \ , \ |F\cap V|=۵ \ , \ |B\cap V|=۶ \ , \ |F\cap B|=۳$$

الف)

$$|F\cup B\cup V|=|S|-|\overline{F}\cap\overline{B}\cap\overline{V}|=۳۴-۱۰=۲۴$$
$$\Rightarrow |F\cup B\cup V|=|F|+|B|+|V|-|F\cap V|-|B\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|$$
$$\Rightarrow ۲۴=۱۵+۱۱+۹-۵-۶-۳+|F\cap B\cap V|\Rightarrow|F\cap B\cap V|=۳$$

ب)

فقط فوتبال بازی کنند : $|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$

پ)

$$|V\cap\overline{B}|=|V|-|V\cap B|=۱۱-۶=۵$$

ت)

فقط فوتبال بازی کنند : $|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$

فقط والیبال بازی کنند : $|V|-|F\cap V|-|B\cap V|+|F\cap B\cap V|=۱۱-۵-۶+۳=۳$

فقط بسکتبال بازی کنند : $|B|-|F\cap B|-|B\cap V|+|F\cap B\cap V|=۹-۳-۶+۳=۳$

$$\Rightarrow ۱۰+۳+۳=۱۶$$

۱۶ نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند.

۴ می‌خواهیم یک رمز ۵ رقمی به‌صورت $\overline{abcde}$ بسازیم که در آن a، b، c، d و e ارقام ۱ تا ۹ می‌باشند.

ابتدا مجموعه‌های A، B و C را به‌صورت زیر و مخالف با آنچه مورد نظر مسئله است تعریف می‌کنیم :

$$A=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۲\}\Rightarrow|A|=۸^۵$$

$$B=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۳\}\Rightarrow|B|=۸^۵$$

$$C=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۷\}\Rightarrow |C|=۸^۵$$

$$A\cap B=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۲,۳\}\Rightarrow |A\cap B|=۷^۵$$

$$A\cap C=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۲,۷\}\Rightarrow |A\cap C|=۷^۵$$

$$B\cap C=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۳,۷\}\Rightarrow |B\cap C|=۷^۵$$

$$A\cap B\cap C=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۲,۳,۷\}\Rightarrow |A\cap B\cap C|=۶^۵$$

تعداد کل ۵ رقمی‌ها : $|S|=۹\times۹\times۹\times۹\times۹=۹^۵=۵۹۰۴۹$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$|A\cup B\cup C|=۸^۵+۸^۵+۸^۵-۷^۵-۷^۵-۷^۵+۶^۵=۵۵۶۵۹$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۵۹۰۴۹-۵۵۶۵۹=۳۳۹۰$$

$\Rightarrow$ زمان لازم برحسب ثانیه : $۳۳۹۰\times۶=۲۰۳۴۰$

۵

تعداد تابع‌ها از A به B : $|B|^{|A|}=۴^۵$

در این سؤال $|A|=m=۵$، $|B|=k=۴$ و شرط $m\leq k$ برقرار نیست، بنابراین هیچ‌کدام از این تابع‌ها یک‌به‌یک نمی‌باشند.

۶ تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه ۵ عضوی به مجموعه ۸ عضوی، یعنی : $(۸)_۵=\frac{۸!}{۳!}=۶۷۲۰$

۷ تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی، که با توجه به تذکر صفحه ۷۹ کتاب از رابطه $۳^m-(۳\times۲^m-۳)$ به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l}|A|=m=۶\geq ۳\\ |B|=۳\end{array}\right\}\Rightarrow ۳^۶-(۳\times۲^۶-۳)=۷۲۹-۱۸۹=۵۴۰$$

۸ اگر روزهای سال را به‌عنوان لانه‌ها و افراد را به‌عنوان کبوترها در نظر بگیریم، در این صورت می‌خواهیم ۳۶۸ کبوتر را در ۳۶۵ لانه قرار دهیم. چون تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است، پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار گیرند، یعنی حداقل دو نفر وجود دارند که در یک روز متولد شده باشند.

۹ ۵۰۵ = تعداد کبوترها

تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته × تعداد ماه‌های سال $\Rightarrow n =$ ۷×۱۲ =۸۴

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری داریم :

تعداد کبوترها $= kn+1 \xrightarrow{n=84} 505 = k\times 84+1 \Rightarrow k=6 \Rightarrow k+1=7$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند، یعنی لااقل ۷ نفر از دانش‌آموزان آن دبیرستان، روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۰ طبق تعمیم اصل لانه کبوتری داریم :

تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای سال → $n=365$ و $k+1=20 \rightarrow k=19$

$\Rightarrow$ تعداد کبوترها $= kn+1 = 19\times 365+1 = 6936$

یعنی حداقل ۶۹۳۶ نفر در آن سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی می‌باشند.

۱۱ می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۲، یکی از اعداد ۰ و ۱ است، اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد بر ۲ را به‌عنوان لانه‌ها در نظر بگیریم، پس ۲ لانه داریم و ۳ عدد طبیعی را به‌عنوان کبوترها در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۳ عدد، باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۲ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۲ هم باقی‌مانده بوده، پس a و b هر دو فرد یا هر دو زوج خواهند بود، که مجموعشان عددی زوج است.

۱۲ اعداد مجموعه $A=\{1,2,\dots,84\}$ را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم : (افراز مجموعه A به ۴۲ زیرمجموعه)

$\{1,84\}$ و $\{2,83\}$ و $\{3,82\}$ و $\{4,81\}$ و $\{5,80\}$ و ... و $\{42,43\}$

دسته‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، بنابراین ۴۲ لانه داریم و می‌خواهیم ۴۳ کبوتر را از اعداد درون آنها انتخاب کنیم. در بدترین شرایط از هر کدام از لانه‌ها یک عدد برداریم، چون ۴۲ لانه داریم و از هر لانه یک عدد انتخاب کرده ایم، پس ۴۲ عدد انتخاب شد، ولی مجموع هیچ دو عددی در بین اعداد انتخابی ۸۵ نمی‌باشد. حال یک عدد مانده که آن را از یکی از لانه‌ها انتخاب کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو عدد در این زیر مجموعه ۴۳ عضوی وجود دارند که مجموعشان برابر ۸۵ می‌باشد.

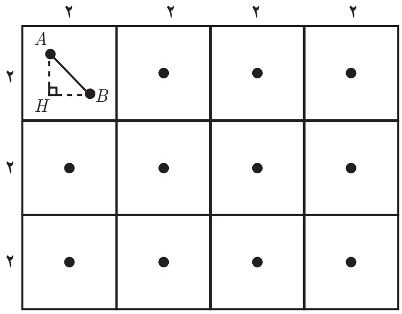
۱۳ اعداد مجموعه $A=\{1,5,\dots,81,85\}$ را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم : (افراز مجموعه A به ۱۲ زیرمجموعه)

$\{1\},\{5,85\},\{9,81\},\{13,77\},\{17,73\},\{21,69\},\{25,65\},\{29,61\},\{33,57\},\{37,53\},\{41,49\},\{45\}$

چون مجموع عدد ۱ و همین طور عدد ۴۵ با هیچ‌کدام از اعداد داخل مجموعه A، برابر ۹۰ نمی‌شوند،

لذا هر کدام از آنها را در یک دسته مجزا قرار دادیم.

دسته‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، بنابراین ۱۲ لانه داریم و می‌خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم. در بدترین شرایط از هر لانه یک عدد برداریم، پس ۱۲ عدد انتخاب شد و یک انتخاب دیگر مانده که آن را از یکی از لانه‌های موجود غیر از لانه‌های یک عضوی، چون قبلاً عدد درون آن را برداشته‌ایم، انتخاب می‌کنیم. پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.



۱۴ با توجه به شکل، مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع ۲ تقسیم کرده و آنها را به‌عنوان ۱۲ لانه در نظر می‌گیریم. اکنون اگر ۱۳ نقطه را به‌عنوان ۱۳ کبوتر تصور کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B وجود دارند که در داخل یک مربع قرار می‌گیرند. ثابت می‌کنیم که $AB < \sqrt{۸}$

$AH <$ ضلع مربع و $BH <$ ضلع مربع

$$\Rightarrow \begin{cases} AH < ۲ \\ BH < ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH^{۲} < ۴ \\ BH^{۲} < ۴ \end{cases} \Rightarrow AH^{۲} + BH^{۲} < ۴ + ۴ \Rightarrow \xrightarrow{AH^{۲}+BH^{۲}=AB^{۲}} AB^{۲} < ۸ \Rightarrow AB < \sqrt{۸}$$

۱۵ هر نقطه به‌صورت زوج مرتب (a,b) دارای دو مؤلفه اول و دوم است که با توجه به زوج یا فرد بودن هر کدام از مؤلفه‌ها، در یکی از دسته‌های زیر قرار می‌گیرد:

	a	b
دسته ۱	زوج	زوج
دسته ۲	زوج	فرد
دسته ۳	فرد	زوج
دسته ۴	فرد	فرد

اگر هر دسته را به‌عنوان لانه و هر نقطه را به‌عنوان کبوتر در نظر بگیریم، در این صورت ۴ لانه و ۵ کبوتر داریم، که طبق اصل لانه کبوتری، لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه، با توجه به زوج یا فرد بودن مختصاتشان، مانند هم هستند. از طرفی چون مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است و مجموع دو عدد فرد، نیز عددی زوج می‌باشد، پس جمع مؤلفه‌های اول آنها و همچنین جمع مؤلفه‌های دوم آنها زوج است و بر ۲ بخش‌پذیرند. بنابراین مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح است.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جاهای خالی را کامل کنید.

الف) با جابه‌جایی ارقام عدد ۳۶۹۴۴۴، تعداد .... تا عدد شش رقمی می‌توان نوشت به‌طوری که رقم‌های ۴ یک در میان باشند.

ب) با ارقام ۳، ۹، ۹، ۳ و ۹، به تعداد .... تا می‌توان کد ۵ رقمی نوشت.

پ) شش نفر که دو نفر آنها برادر هستند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند. تعداد حالاتی که دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند، برابر .... است.

ت) تعداد طرقی که R مهره نامتمایز را می‌توان در N جعبه متمایز جا داد. به‌طوری‌که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد، برابر .... است. $(N \leq R)$

ث) تعداد طرقی که می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد به‌طوری‌که هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد، برابر $\binom{\cdots\cdots}{۲}$ است.

ج) اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع S باشند، در این صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A، B و C قرار ندارند، به‌صورت .... نشان داده می‌شود.

چ) تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر ۳ بخش‌پذیر باشند، برابر .... است.

ح) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به مجموعه ۸ عضوی برابر .... است.

خ) تعداد توابع غیرپوشا از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ برابر .... است.

د) هر گاه .... کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k+۱$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تعداد جایگشت‌های مختلف کلمهٔ consonant، به‌طوری که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، برابر !۶ است.

ب) تعداد طرقی که ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ کنار هم قرار گیرند به‌طوری که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند، برابر $۲!\times۳!$ است.

پ) مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰ را می‌توان به تعداد $\frac{۱۰!}{۲!\times۳!\times۴!}$ طریق به مجموعه‌های ۲، ۳ و ۴ عضوی افراز نمود.

ت) تعداد توابع غیر یک به یک از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ روی خودش، برابر ۲۱ تا است.

ث) به تعداد $۵^۴$ تابع مانند $f: A \rightarrow B$ می‌توان تعریف کرد، اگر بدانیم $|A|=۵$ و $|B|=۴$ است.

ج) تعداد طرقی که می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد به‌طوری‌که هر نفر حداکثر یک کتاب داشته باشد، برابر $\binom{۸}{۵}$ است.

چ) مجموعه اعدادی که بر a و بر b بخش‌پذیر باشد با مجموعه اعدادی که بر «ب م م» آن دو عدد بخش‌پذیرند، برابر می‌باشد.

ح) اصل لانه کبوتری قضیه‌ای است که با برهان خلف ثابت می‌شود.

خ) اگر ۴ نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ در نظر بگیریم، به‌طور یقین حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

د) از ۶۶ نفر در یک مهمانی، به‌طور یقین حداقل ۳ نفر یافت می‌شوند که نام‌خانوادگی آنها با یک حرف فارسی شروع شود.

۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) به چند طریق می‌توان ۸ سیب را بین چهار نفر تقسیم کرد که اولاً همه سیب‌ها تقسیم شوند. ثانیاً بریدن سیب مجاز نباشد، ثالثاً به هر نفر حداقل یک سیب برسد؟

۱) $\binom{۸}{۳}$ ۲) $\binom{۷}{۴}$ ۳) $\binom{۸}{۴}$ ۴) $\binom{۷}{۲}$

ب) ۱۸ تخته سیاه نامتمایز را به چند طریق می‌توان بین ۸ مدرسه تقسیم کرد؟

۱) $۸^{۱۸}$ ۲) $۱۸^{۸}$ ۳) $\binom{۱۸+۸-۱}{۸}$ ۴) $\binom{۱۸+۸-۱}{۱۸}$

پ) ۱۰ سکه بهار آزادی را به چند طریق می‌توان میان ۳ نفر تقسیم تصادفی نمود؟

۱) ۶۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۰۰۰

ت) به چند طریق مختلف می‌توان تعداد ۵ کلید مشابه میله‌ای و ۱۰ کلید مشابه دکمه‌ای را در یک پانل کنترل کنار هم چید به‌طوری که کلید چهارم از نوع میله‌ای باشد؟

۱) ۱۰۰۱ ۲) ۲۰۰۲ ۳) ۳۰۰۳ ۴) ۴۰۰۴

ث) به چند طریق می‌توان ۲۰ مهره نامتمایز را در ۱۵ ظرف متمایز قرار داد به‌طوری‌که ظرف شماره ۷ درست ۴ مهره داشته باشد؟

۱) $\binom{۲۹}{۱۴}$ ۲) $\binom{۳۰}{۱۴}$ ۳) $\binom{۲۹}{۱۳}$ ۴) $\binom{۳۰}{۱۳}$

ج) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ که $x_i \in N\cup\{0\}$ ، کدام است؟

۱) $\binom{10}{4}$ ۲) $\binom{13}{4}$ ۳) $\binom{13}{10}$ ۴) $\binom{14}{4}$

چ) ۵ درخت کاج متمایز و ۷ درخت صنوبر متمایز و ۳ درخت سرو متمایز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کاشت؟

۱) $\frac{15!}{5!\times 7!\times 3!}$ ۲) $\frac{15!}{3!}$ ۳) $15!$ ۴) $\binom{15}{3}$

ح) ۳ کتاب متمایز ریاضی و ۴ کتاب متمایز ادبی را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک قفسه قرار داد به‌طوری که کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

خ) کمترین مقدار m در مجموعه $\{$۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ... و $m\}$ چقدر باشد تا حداقل ۶ عضو از مجموعه در تقسیم بر عدد ۶ باقی‌مانده‌های یکسانی داشته باشند؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۳ ۳) ۳۱ ۴) ۵۱

د) حداقل تعداد نقاط درون دایره‌ای به شعاع واحد، به‌طوری‌که حداقل سه نقطه وجود داشته باشد که مساحت مثلث حاصل از این سه نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

ذ) در یک مهمانی حداقل چند نفر حضور داشته باشند تا دست کم چهار نفر از آنها در یک روز هفته و یک فصل از سال متولد شده باشند؟

۱) ۸۴ نفر ۲) ۱۱۲ نفر ۳) ۸۵ نفر ۴) ۱۱۳ نفر

ر) تعدادی کتاب از چهار موضوع مختلف، متعلق به دانش‌آموزی می‌باشد، حداقل چند کتاب باید وجود داشته باشد تا دانش‌آموز لااقل ۳ کتاب از یک موضوع داشته باشد؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۱۳

ز) حداقل چند دو تایی مرتب از اعداد صحیح انتخاب کنیم، تا به‌طور یقین لااقل در دو جفت انتخاب شده (a,b) و (c,d)، حاصل هر عدد $a+c$ و $b+d$ زوج باشند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

ژ) در چند گراف ساده با رئوس a,b,c,d,e ، هیچ یک از رأس‌های a,b,c تنها نیستند؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۹۲ ۳) ۴۳۲ ۴) ۸۵۴

س) n عدد طبیعی متمایز موجود است. حداقل مقدار n چقدر باشد تا اطمینان یابیم که حداقل ۳ عدد مابین آنها موجود است که دارای رقم یکان یکسانی بوده و در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌های یکسان دارند؟

۱) ۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۶۱ ۴) ۹۱

ش) اگر $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $|A\cap B|=۲$ و مجموعه $(A-B)\times(B-A)$ دارای ۲۱ عضو باشد، تعداد عضوهای مجموعه A کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

ص) تعداد اعداد دو رقمی که مضرب ۷ هستند اما بر ۱۱ بخش‌پذیر نیستند، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

ض) در مجموعه $\{۱,۲,\ldots,۶۰۰\}$ چند عدد وجود دارد که مضرب ۵ باشند، ولی بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

۱) ۳۴ ۲) ۶۸ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۵۴

ط) چند تابع پوشای f می‌توان نوشت به‌طوری‌که : $f:\{۱,۲,۳\}\to\{۴,۵\}$

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۶ ۴) ۵

ظ) به چند طریق می‌توان بین سه روستای A, B و C جاده کشید، به‌طوری‌که هیچ روستایی تنها نماند؟

۱) ۱ ۲) ۱۴ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $x_۱+x_۲+x_۳=۶$ ب) $x_۱+x_۲+۱۰x_۳=۲۳$

۵ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $x_۱+x_۲+x_۳=۱۲$ ب) $x+y+(z+۲)^۲=۱۲$

۶ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۱۵$ را با شرط $x_۱>۱$ و $x_۲>۲$ و $x_۳>۳$ تعیین کنید.

۷ تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x+y+z+t=۴۸$ که $x>۵$، $z>۷$، $y>۶$ و $t>۸$ را به‌دست آورید.

۸ معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۱۵$ با شرط $x_i\geq ۲i-۱$ و $i=۱,۲,۳$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۹ به چند طریق یک کلاس ۳۰ نفری می‌توانند به سه کاندیدای مشخص از کلاسشان رأی دهند؟ (هر دانش‌آموزی فقط یک رأی می‌دهد.)

۱۰ سه نوع گل و به تعداد فراوان از هر نوع داریم، ۸ شاخه گل از بین آنها انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که از هر نوع حداقل ۲ شاخه برداشته باشیم، تعداد راه‌های انتخاب چند تا است؟

۱۱ می‌خواهیم ۷ مداد را میان ۳ نفر توزیع کنیم به‌طوری‌که ممکن است به بعضی‌ها مداد نرسد، تعداد حالات چند تا است؟

۱۲ ۸ نفر می‌خواهند با ۳ ماشین سواری مسافرت بروند، به چند صورت می‌توانند مسافرت کنند؟

۱۳ می‌خواهیم ۱۰ شاخه گل را بین ۳ نفر تقسیم کنیم به‌طوری‌که به هر کس حداقل یک شاخه گل برسد. به چند طریق می‌توان این کار انجام داد؟

۱۴ هفت کبوتر به چند طریق می‌توانند در سه لانه متمایز قرار گیرند به‌طوری‌که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

۱۵ ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان یک در میان در یک قفسه چید؟

۱۶ شماره پلاک ماشینی ۵۵۵ م ۱۱ است. چند پلاک ماشین با همین ۵ رقم و حرف «م» می‌توان ساخت؟

۱۷ ۹ نفر برای صعود یک کوه به چند طریق می‌توانند به گروه‌های ۲، ۳ و ۴ نفره تفکیک شوند؟

۱۸ با حروف کلمه Mississippi، چند کلمه ۱۱ حرفی می‌توان نوشت به‌طوری‌که:

الف) قیدی درباره مکان حروف نباشد.

ب) همه sها کنار هم باشند.

۱۹ در یک نظرخواهی از ۱۰۰ نفر دانش‌آموز نتایج زیر به‌دست آمده است:

۶۰ نفر آنها مجله A را می‌خوانند، ۵۰ نفر مجله B، ۵۰ نفر مجله C، ۳۰ نفر مجله‌های A و B و ۲۰ نفر مجله‌های B و C، ۴۰ نفر مجله‌های A و C و بالاخره ۱۰ نفر هر سه مجله A، B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند.

ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند.

پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند.

۲۰ با ارقام ۱، ۲ و ۳ چند عدد شش رقمی ساخته می‌شود که در هر یک از آنها، هر یک از ارقام مذکور حداقل یک بار ظاهر شوند؟

۲۱ چه تعداد شماره شناسنامه پنج رقمی می‌توان ساخت که در آنها هر یک از رقم‌های ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر شوند؟

۲۲ اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{e,f\}$ باشد، مطلوب است :

الف) تعداد توابع از B به A

ب) تعداد توابع یک به یک از B به A

پ) تعداد توابع پوشا از B به A

۲۳ چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ وجود دارد که نسبت به ۶۵ اول باشد؟

۲۴ در بین اعداد طبیعی، چند عدد سه رقمی داریم که نه بر ۳ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشند؟

۲۵ ۶ مسافر به چند طریق می‌توانند در ۳ ایستگاه پیاده شوند به‌طوری‌که لااقل در یکی از ایستگاه‌ها کسی پیاده نشود؟

۲۶ ده نقطه داخل مربعی به ضلع واحد مفروض‌اند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این ده نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ می‌باشد.

۲۷ پنج نقطه داخل دایره‌ای به شعاع ۳ مفروض‌اند. نشان دهید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه از $۳\sqrt{۲}$ کمتر است.

۲۸ ۱۴ عدد از مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید تفاضل حداقل دو تا از عددها برابر ۷ است.

۲۹ از مجموعه $\{۱,۲,۳,۵,۹,۱۳,۱۷\}$ یک زیرمجموعه انتخاب می‌کنیم. حداقل تعداد عضوهای زیرمجموعه چند عضو باشد تا همواره مطمئن شویم دو عضو آن در رابطه $y=۴x+۱$ صدق می‌کند؟

۳۰ برای آنکه در یک شهرک حداقل چهل نفر در یکی از ماه‌های سال متولد شده باشند، باید در این شهرک حداقل چند نفر زندگی کنند؟

۳۱ یک مجموعه ۳۶ عضوی از اعداد طبیعی داریم. اگر همه این اعداد را بر عدد ۳۵ تقسیم کنیم، نشان دهید حداقل ۲ عدد از بین آنها یافت می‌شود که در تقسیم بر ۳۵ باقی‌مانده یکسان داشته باشند.

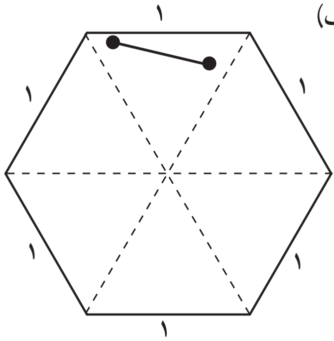
۳۲ نشان دهید هر زیر مجموعه از مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ که دارای ۶ عضو می‌باشد، حداقل دو عضو دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است.

۳۳ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن برابر باشد با :

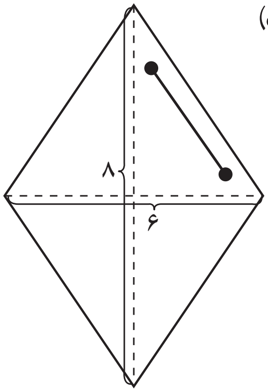
الف) $۵\times ۸!$ ب) $۴!\times ۶!$ پ) $۲!\times ۵!\times ۴!$

۳۴ برای هر کدام از شکل‌های زیر مسئله‌ای طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.

الف)



ب)



معلّمان محترم و صاحب‌نظران گرامی می‌توانند نظر اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران- صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۸۷۴- گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری