مدرسان شریف

فصل اول

«آنالیز ترکیبی و احتمال»

درسنامه (۱): آنالیز ترکیبی

مقدمه

نیاز به آمار به دلیل رشد و پیشرفت آن در بسیاری از شاخه‌ها از قبیل علوم مهندسی، اقتصاد، مدیریت و ... احساس می‌شود و دیگر به آمار به عنوان مجموعه‌ای از داده‌های خام دسته‌بندی شده، نگاه نمی‌شود. امروزه پژوهشگران براساس مشاهدات و داده‌های جمع‌آوری شده با کمک گرفتن از علم آمار در برخورد با عدم قطعیت در وقوع رخدادها و اتفاقات اقدام به استنباط و تصمیم‌گیری می‌کنند.

موضوع عدم قطعیت، دامنه وسیعی از مسائل روزمره را دربرمی‌گیرد. به‌عنوان مثال، کارشناس بیمه در زمان تعیین حق بیمه، پژوهشگر دارو به هنگام آزمایش مواد افزوده شده به دارو و یا یک اقتصاددان برای پیش‌بینی رویدادهای اقتصادی به نوعی با عدم قطعیت در وقوع رخدادها مواجه هستند. مطالبی که در این فصل ارائه شده است شامل اصول و تکنیک‌های شمارش، تعریف مقدماتی احتمال، قوانین احتمال، احتمال شرطی، قانون احتمال کل و دستور بیز همراه با مثال‌های متنوع می‌باشد. فهم مطالب این فصل در یادگیری مفاهیم فصل‌های بعد کمک زیادی خواهد کرد.

اصل شمارش ضرب (اصل اساسی شمارش)

فرض کنید آزمایشی در دو مرحله انجام می‌شود. به‌طوری‌که برای اولین مرحله، m روش ممکن و در مرحله دوم برای هر روش مرحله اول، n روش ممکن وجود داشته باشد. آنگاه برای انجام دو مرحله با هم، $m \times n$ روش ممکن وجود دارد.

مثال ۱: شخصی دارای ۴ پیراهن و ۳ شلوار است. این شخص به چند طریق می‌تواند لباس‌های متفاوت بپوشد؟

۱) ۱۴　　۲) ۱۲　　۳) ۲۶　　۴) ۷

پاسخ: گزینه «۲» در اینجا برای تهیه لباس‌های متفاوت که شامل ۱ پیراهن و ۱ شلوار است، شخص می‌تواند به ۴ طریق یکی از ۴ پیراهن و به ۳ طریق یکی از ۳ شلوار را انتخاب کند. در نتیجه تعداد لباس‌های متفاوت که شخص می‌تواند بپوشد با استفاده از اصل شمارش ضرب برابر $۴\times۳=۱۲$ است.

تعمیم اصل شمارش ضرب

فرض کنید آزمایشی در k مرحله قابل انجام باشد. به‌طوری‌که مرحله اول به n_1 طریق و مرحله دوم به n_2 طریق و مرحله سوم به n_3 طریق و ... و مرحله k ام به n_k طریق بتواند انجام شود. آنگاه این آزمایش در k مرحله به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق می‌تواند انجام شود. برای درک بهتر این تعریف به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲: فرض کنید A، B، C، D و E پنج شهر باشند که مطابق شکل زیر توسط جاده‌هایی به‌هم وصل شده‌اند، به چند حالت می‌توان از A به E با عبور از شهرهای B، C و D سفر کرد؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۴　　۳) ۲۸　　۴) ۲۴

پاسخ: گزینه «۴» مسافرت از A به E، در ۴ مرحله انجام می‌شود در مرحله اول سفر از A به B به $n_1=۳$ طریق انجام می‌شود، در مرحله دوم سفر از B به C به $n_2=۲$ طریق انجام می‌شود، در مرحله سوم سفر از C به D به $n_3=۱$ طریق انجام می‌شود، در مرحله چهارم سفر از D به E به $n_4=۴$ طریق انجام می‌شود. در نتیجه تعداد راه‌های رفتن از A به E با استفاده از اصل شمارش ضرب برابر $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = ۳\times۲\times۱\times۴ = ۲۴$ می‌شود.

نکات مربوط به شمارش اعداد یا تشکیل کدها، رمزها و سریال‌ها:

برای شمارش اعداد یا ساخت کدها، رمزها و سریال‌ها به نکات زیر توجه فرمایید.

۱) اگر هدف مسئله تشکیل عدد چندرقمی باشد، صفر نمی‌تواند در اولین رقم سمت چپ قرار بگیرد. به‌عنوان مثال ۰۸۴ عدد سه رقمی نیست.

۲) اگر هدف مسئله تشکیل کد، رمز یا سریال چندرقمی باشد، صفر می‌تواند در اولین رقم سمت چپ قرار بگیرد. به عنوان مثال ۰۲۱ کد سه رقمی است.

۳) در ساخت کدها، رمزها و اعداد از سمت چپ به راست حرکت می‌کنیم. مگر آنکه در صورت مسئله شرطی از قبیل فرد بودن، زوج بودن و یا غیره بیان شده باشد. در این حالت ابتدا شرایط داده شده در مسئله مانند فرد بودن یا زوج بودن و یا غیره را مشخص می‌کنیم. سپس مجدداً از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کنیم.

۴) در ساخت کدها، رمزها و اعداد پیش‌فرض تکرار مجاز است مگر آنکه شرط بدون تکرار ذکر شده باشد.

مثال ۳: با استفاده از ارقام {۷,۰,۲,۹,۵} چند عدد چهاررقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرض کنید عدد چهاررقمی مطابق خانه‌های A، B، C و D مقابل باشد. از سمت چپ به راست حرکت می‌کنیم. چون در صورت مسئله عدد چهاررقمی خواسته شده است از طرفی در خانه A، صفر نمی‌تواند قرار بگیرد، پس یکی از ارقام {۷,۲,۹,۵} را می‌توان برای خانه A انتخاب کرد که این کار به ۴ طریق انجام می‌شود. با قرار دادن یکی از ارقام {۷,۲,۹,۵} برای خانه A، چون تکرار ارقام مجاز نیست و صفر می‌تواند در خانه B قرار بگیرد، لذا برای خانه B، ۴ انتخاب و برای خانه C، ۳ انتخاب و برای خانه D، ۲ انتخاب داریم.

A	B	C	D
4	4	3	2

در نتیجه با استفاده از اصل شمارش ضرب تعداد اعداد چهاررقمی خواسته شده برابر ۹۶ = ۲×۳×۴×۴ است.

مثال ۴: چند کلمه ۵ حرفی با استفاده از حروف b، a و c می‌توان نوشت به طوری که هیچ دو حرف مجاور یکسان <u>نباشد</u>؟

۱) ۵۲ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۳۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض کنید کلمه ۵ حرفی مطابق خانه‌های A، B، C، D و E باشد. برای خانه A یکی از سه حرف $\{a,b,c\}$ به ۳ طریق انتخاب می‌شود. با توجه به شرط مسئله، اگر برای خانه A حرف a انتخاب شود در این صورت برای خانه B یکی از دو حرف $\{b,c\}$ به ۲ طریق انتخاب می‌شود.
اکنون اگر برای خانه B، b انتخاب شود آنگاه برای خانه C یکی از حروف $\{a,c\}$ به ۲ طریق انتخاب می‌شود. با همین استدلال برای خانه D، ۲ انتخاب و برای خانه E نیز ۲ انتخاب داریم.

A	B	C	D	E
3	2	2	2	2

در نتیجه تعداد کل کلمات ۵ حرفی با استفاده از اصل شمارش ضرب برابر ۴۸ = ۲×۲×۲×۲×۳ است.

مثال ۵: چند عدد فرد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

۱) ۲۴۴ ۲) ۲۸۰ ۳) ۴۱۰ ۴) ۳۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عدد سه رقمی فرد خواسته شده به کمک ارقام {۰,۱,۲,...,۹} نوشته می‌شود. برای این کار فرض کنید عدد سه رقمی خواسته‌شده مطابق خانه‌های A، B و C مقابل باشد. برای آنکه عدد سه رقمی فرد باشد، لازم است برای خانه C یا خانه یکان، یکی از ارقام {۱,۳,۵,۷,۹} انتخاب شود که این کار به ۵ طریق انجام می‌شود. چون ارقام متمایز است و تکرار مجاز نیست و صفر نمی‌تواند در خانه A قرار بگیرد، با انتخاب یک رقم برای خانه C، برای خانه A، ۸ انتخاب داریم. در خانه B عدد صفر می‌تواند قرار بگیرد. پس برای خانه B نیز ۸ انتخاب داریم.

A	B	C
8	8	5

در نتیجه تعداد اعداد سه رقمی فرد با ارقام متمایز با استفاده از اصل شمارش ضرب برابر ۳۲۰ = ۵×۸×۸ می‌شود.

مدرسان شریف

فصل دوم

«متغیرهای تصادفی»

درسنامه (۱): متغیرهای تصادفی گسسته و توابع احتمال

مقدمه

در فصل قبل، مبحث احتمال تنها محدود به یک یا چند جنبه خاص یک آزمایش تصادفی بود نه تمام خصوصیات آن‌ها. به‌عنوان مثال در پرتاب یک جفت تاس، فقط برآمدی از قبیل «مجموع دو عدد برابر ۷» مورد بررسی قرار گرفت. حال آنکه ممکن است بخواهیم برآمد «حاصل مجموع هر دو عدد رو شده» را مورد بررسی قرار دهیم. در چنین مسائلی اگر عناصر و اعضای فضای نمونه‌ای مربوط به آزمایش تصادفی، عدد نباشد، توصیف و بررسی هر خصوصیت از آن‌ها بسیار دشوار خواهد بود. لذا نیاز است روشی ارائه شود تا به جای عناصر فضای نمونه، اعداد قرار بگیرد. متغیری که این اعداد را اختیار می‌کند، متغیر تصادفی گفته می‌شود. بنابراین هدف از معرفی متغیرهای تصادفی، ارائه روشی است که به‌جای عناصر فضای نمونه اعداد قرار بگیرد. به‌عنوان مثال در پرتاب دو تاس، «مجموع دو عدد رو شده» متغیر تصادفی است که می‌تواند مقادیر ۴،۳،۲ , ... ،۱۲ را اختیار کند. اکنون با توجه به توضیحات بالا متغیر تصادفی را تعریف می‌کنیم.

متغیر تصادفی

متغیر تصادفی تابعی است از فضای نمونه‌ای S به مجموعه اعداد حقیقی. به عبارت دیگر تابعی است که به هرکدام از اعضای فضای نمونه یک عدد نسبت می‌دهد. و صفت تصادفی به این دلیل به‌کار می‌رود که از قبل نمی‌دانیم کدام پیشامد رخ خواهد داد و متغیر موردنظر چه مقدار را اختیار خواهد کرد. معمولاً متغیرهای تصادفی را با حروف بزرگ لاتین مانند X و Y و مقادیری را که اختیار می‌کنند با حروف کوچک مانند x و y نشان می‌دهند. به‌عنوان مثال اگر سکه‌ای دو مرتبه پرتاب شود و متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد شیرهای ظاهر شده باشد، در این صورت مقادیری که X می‌تواند اختیار نماید به شکل زیر تعیین می‌شود. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی برابر $S=\{TT , TH , HT , HH\}$ است، بنابراین S شامل چهار برآمد است. برآمد TT به‌معنای این است که در پرتاب دو مرتبه سکه، اصلاً شیر ظاهر نشود و چون X نشان‌دهنده تعداد شیرهای ظاهر شده است، لذا برای این برآمد، X مقدار صفر را اختیار می‌کند. همچنین برای برآمد TH یا HT، چون تعداد شیرهای ظاهر شده برابر ۱ است بنابراین برای هریک از این دو برآمد X مقدار ۱ را اختیار می‌کند و در برآمد HH، چون دو مرتبه شیر ظاهر شده، پس X مقدار۲ را اختیار می‌کند. جدول زیر برآمدها و مقادیر متغیر تصادفی X را نشان می‌دهد.

برآمد	TT	TH	HT	HH
مقادیر متغیر تصادفی X	۰	۱	۱	۲

بنابراین نتیجه می‌شود $x=0,1,2$ می‌باشد.

انواع متغیرهای تصادفی

متغیرهای تصادفی به سه دسته‌ی، گسسته، پیوسته و آمیخته (برخی مقادیر گسسته و برخی مقادیر پیوسته) تقسیم می‌شود.

۱) متغیر تصادفی گسسته

متغیر تصادفی را گسسته می‌نامند هرگاه مقادیر آن شمارای متناهی یا شمارای نامتناهی باشد. به‌عنوان مثال، اگر از بین هشت کارت به شماره ۱ تا ۸ یک کارت به تصادف انتخاب شود و X نشان‌دهنده عدد روی کارت باشد، در این صورت مجموعه مقادیری که X می‌تواند اختیار نماید، عبارت از $\{1,2,...,8\}$ است که یک مجموعه شمارای متناهی است. به عنوان مثال دیگر چنانچه X نشان‌دهنده تعداد پرتاب‌های یک تاس تا مشاهده اولین عدد ۶ باشد، در این صورت X با مقادیر شمارای نامتناهی به صورت مجموعه $\{1,2,3,...\}$ خواهد بود.

۲) متغیر تصادفی پیوسته

متغیری است که هر ارزش یا مقدار (اعشاری یا کسری) را می‌توان به آن اختصاص داد. به بیان دیگر، متغیر تصادفی پیوسته متغیری است که مقادیر خود را از یک فاصله عددی از قبیل پاره‌خط، نیم‌خط یا خط حقیقی اختیار می‌کند. مانند وزن و قد هرکدام از ورزشکاران، سرعت هریک از ماشین‌ها، میزان بارندگی در هریک از شهرها، طول عمر یک نوع قطعه الکترونیکی، میزان مصرف آب، برق، گاز و یا درآمد کارگران ساختمانی.

۳) متغیر تصادفی آمیخته

هر متغیر تصادفی که در فاصله‌هایی از دامنه خود مقادیر عددی پیوسته و گسسته اختیار نماید و به‌صورت ترکیبی از متغیر تصادفی گسسته و پیوسته ظاهر شود، به آن متغیر تصادفی آمیخته می‌گویند. این متغیرها اغلب چند ضابطه‌ای هستند. به‌عنوان مثال، فرض کنید هزینه پیامک‌های تلفن همراه برحسب تعداد پیامک و هزینه مکالمات برحسب زمان، محاسبه شود در این صورت اگر Y بیانگر هزینه استفاده از تلفن همراه باشد، می‌توان گفت Y یک متغیر تصادفی آمیخته است که شامل مقادیر گسسته هزینه پیامک‌ها و مقادیر پیوسته هزینه مدت زمان مکالمات می‌شود.

مثال ۱: یک زوج جوان در نظر دارند صاحب سه فرزند شوند. اگر متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد فرزندان پسر باشد، در این صورت مقادیر X را بنویسید.

پاسخ: فضای نمونه‌ای عبارت از $S=\{ggg, ggb, gbg, bgg, gbb, bgb, bbg, bbb\}$ می‌باشد. چون X نشان‌دهنده تعداد فرزندان پسر است، بنابراین برای برآمد ggg مقدار X برابر صفر است و برای هریک از برآمدهای ggb، gbg و bgg، مقدار X برابر ۱ است و همچنین برای برآمدهای gbb، bgb و bbg مقدار X برابر ۲ و برای برآمد bbb مقدار X برابر ۳ می‌باشد. برآمدها و مقادیر متناظر هر برآمد در جدول زیر آمده است.

برآمد	ggg	ggb	gbg	bgg	gbb	bgb	bbg	bbb
مقدار متغیر تصادفی X	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳

در نتیجه طبق جدول فوق مقادیری که X می‌تواند اختیار نماید برابر $x=0,1,2,3$ می‌باشد.

تابع احتمال متغیرهای تصادفی گسسته

تابع احتمال یا تابع توزیع احتمال، برای متغیر تصادفی گسسته، جدول یا فرمولی است که برای هرکدام از مقادیر متغیر تصادفی، احتمال مربوط به آن را مشخص می‌کند. برای متغیر تصادفی گسسته X با مقادیر $X=x_i$ ، $i=1,2,\dots,n$، احتمال آنکه X مقدار x_i را اختیار کند با نماد $P(X=x_i)$ یا $f(x_i)$ نشان می‌دهیم.

به‌عنوان مثال، اگر از بین سه کارت به شماره ۱ تا ۳ به تصادف کارتی انتخاب کنیم و X نشان‌دهنده عدد روی کارت باشد، در این صورت X مقادیر ۱، ۲ یا ۳ را اختیار می‌کند. احتمال آنکه $X=1$ باشد، برابر $f(1)=P(X=1)=\frac{1}{3}$، احتمال آنکه $X=2$ باشد، برابر $f(2)=P(X=2)=\frac{1}{3}$ و احتمال آنکه $X=3$ باشد، برابر $f(3)=P(X=3)=\frac{1}{3}$ است. لذا تابع احتمال X به فرم جدولی به‌صورت

x	۱	۲	۳
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

می‌باشد.

❖ **تعریف:** برای متغیر تصادفی X با مقادیر گسسته $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، عبارت $f(x)$ را تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته X گویند اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق نماید.

۱) $0 \le f(x_i) \le 1 \quad i=1,\cdots,n$

۲) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=1$

مثال ۲: به ازای کدام مقدار k عبارت $f(x)=k\binom{3}{x}\ ,\ x=0,1,2,3$ یک تابع احتمال است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{10}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بر طبق ویژگی‌های تابع احتمال، عبارت $f(x)$ وقتی می‌تواند تابع احتمال باشد که شرط $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=1$ برقرار باشد. اکنون مقدار k را از این تساوی حساب می‌کنیم. چون $x=0,1,2,3$ و $f(x)=k\binom{3}{x}$ بنابراین:

$$f(0)=k\binom{3}{0}=k \qquad f(1)=k\binom{3}{1}=3k \qquad f(2)=k\binom{3}{2}=3k \qquad f(3)=k\binom{3}{3}=k$$

مقادیر به دست آمده $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(3)$ را در تساوی $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=1$ قرار می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$k+3k+3k+k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{8}$$

✍ **مثال ۳: متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $P(X=n)=\frac{k}{n!}$ ، $n=1,2,3,\ldots$ است. مقدار ثابت k کدام است؟**

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) e ۳) $\frac{1}{e-1}$ ۴) $\frac{1}{e-2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه مقدار k از شرط $\sum_{n=1}^{\infty}P(X=n)=1$ برای تابع احتمال X استفاده می‌کنیم. طبق فرض مسئله $P(X=n)=\frac{k}{n!}$ است، لذا داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X=n)=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n!}=1 \Rightarrow \frac{k}{1!}+\frac{k}{2!}+\frac{k}{3!}+\cdots=1$$

با فاکتورگیری از k به تساوی $k(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots)=1$ می‌رسیم.

از طرف دیگر می‌دانیم عبارت e^x دارای بسط $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ می‌باشد. با انتخاب $x=1$ ، حاصل e^1 برابر $e^1=\sum_{n=0}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ می‌شود و چون $0!=1$ است، داریم:

$$e^1-1=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

اکنون در تساوی $k(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots)=1$ به جای عبارت داخل پرانتز معادل آن یعنی $(e-1)$ را قرار می‌دهیم در این صورت نتیجه می‌شود:

$$k(e-1)=1 \Rightarrow k=\frac{1}{e-1}$$

✍ **مثال ۴: به ازای کدام مقدار k عبارت $f(x)=\frac{k\lambda^x}{x!}$ و $x=0,1,2,\cdots$ یک تابع احتمال است؟**

۱) $e^{-\lambda}$ ۲) $2e^{\lambda}$ ۳) $\frac{e^{-\lambda}}{2}$ ۴) $\frac{1}{e^{\lambda}-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مقدار k را از شرط $\sum_{x=0}^{\infty}f(x)=1$ به دست می‌آوریم. طبق فرض مسئله $f(x)=\frac{k\lambda^x}{x!}$ می‌باشد. درنتیجه:

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{k\lambda^x}{x!}=1 \Rightarrow \frac{k\lambda^0}{0!}+\frac{k\lambda^1}{1!}+\frac{k\lambda^2}{2!}+\cdots=1$$

از k فاکتور می‌گیریم. در این صورت تساوی $k(\frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots)=1$ حاصل می‌شود.

عبارت e^x دارای بسط $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ است. بنابراین با انتخاب $x=\lambda$ ، حاصل e^{λ} برابر $e^{\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}$ می‌شود. اکنون در تساوی $k(\frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda 1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots)=1$ به‌جای عبارت داخل پرانتز معادل آن، یعنی (e^{λ}) را قرار می‌دهیم. در نتیجه:

$$k(e^{\lambda})=1 \Rightarrow k=\frac{1}{e^{\lambda}}=e^{-\lambda}$$

مثال ۵: اگر یک تابع توزیع احتمال به‌صورت $n=0,1,2,3,\dots$ ، $P(n)=A\binom{n+1}{n}(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^n$ باشد (A یک ثابت مثبت است) و $\binom{n+1}{n}$ تعداد ترکیبات $n+1$ حرف n به n می‌باشد. آنگاه ثابت A چقدر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه مقدار ثابت A از شرط $\sum_{n=0}^{\infty}P(n)=1$ برای تابع احتمال $P(n)$ استفاده می‌کنیم. برای اینکار در رابطه‌ی $\sum_{n=0}^{\infty}P(n)=1$ به جای $P(n)$ معادل آن را قرار می‌دهیم. داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}A\binom{n+1}{n}(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^n=1$$

چون $\binom{n+1}{n}=n+1$ بنابراین داریم:

$$\frac{4}{9}A\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{3^n}=1\Rightarrow\frac{4A}{9}(\frac{1}{3^0}+2(\frac{1}{3})+3(\frac{1}{3})^2+\cdots)=1$$

از طرفی اگر $|x|<1$ باشد، طبق حد مجموع دنباله هندسی $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$ می‌شود. اکنون با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه نسبت به x نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

با انتخاب $x=\frac{1}{3}$ تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}=1+2(\frac{1}{3})+3(\frac{1}{3})^2+4(\frac{1}{3})^3+\cdots\Rightarrow\frac{1}{\frac{4}{9}}=1+2(\frac{1}{3})+3(\frac{1}{3})^2+4(\frac{1}{3})^3+\cdots\Rightarrow1+2(\frac{1}{3})+3(\frac{1}{3})^2+4(\frac{1}{3})^3+\cdots=\frac{9}{4}$$

اکنون در تساوی $\frac{4A}{9}(1+2(\frac{1}{3})^1+3(\frac{1}{3})^2+4(\frac{1}{3})^3+\cdots)=1$ به جای عبارت داخل پرانتز معادل آن یعنی $\frac{9}{4}$ را قرار می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$\frac{4A}{9}(\frac{9}{4})=1\Rightarrow A=1$$

تابع توزیع تجمعی

در برخی از مسائل، دانستن احتمال اینکه متغیر تصادفی X، کوچک‌تر یا مساوی یک مقدار حقیقی مانند x باشد، دارای اهمیت است. به‌عنوان مثال، مدیر یک فروشگاه عرضه کالا تمایل دارد بداند احتمال آن‌که در یک روز خاص حداکثر ۱۰۰ واحد کالا می‌تواند به فروش برساند، چقدر است؟ یا یک تولیدکننده می‌خواهد مشخص نماید احتمال اینکه در هفته جاری حداقل ۵۰ واحد سفارش محصول داشته باشد، چقدر است؟ برای پاسخ به این سؤالات و همچنین سؤالات مشابه، می‌توان از تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی استفاده کرد. برای این منظور احتمال آنکه متغیر تصادفی X مقداری کوچک‌تر و یا مساوی مقدار x اختیار نماید، به‌صورت $F(x)=P(X\le x)$ نوشته می‌شود و این تابع را که برای تمام اعداد حقیقی x تعریف شده است، تابع توزیع یا توزیع تجمعی متغیر تصادفی X می‌نامیم.

❖ **تعریف:** فرض کنید X متغیر تصادفی گسسته، با تابع احتمال $f(x)$ باشد. در این صورت تابع توزیع (توزیع تجمعی) X را بانماد $F(x)$ نشان می‌دهیم و برای هر $x\in\mathbb{R}$ به‌صورت روبه‌رو تعریف می‌شود.

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x}f(t)$$

مثال ۶: برای متغیر تصادفی X با تابع احتمال زیر، مقدار $F(\sqrt{3})$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}0/3 & x=0\\0/25 & x=1\\0/35 & x=2\\0/1 & x=3\end{cases}$$

۱) $0/6$
۲) $0/9$
۳) $0/55$
۴) $0/3$

پاسخ: گزینه «۳» بر طبق تعریف تابع توزیع داریم:

$$F(\sqrt{3})=P(X\le\sqrt{3})=P(X\le1/7)=f(1)+f(0)=0/25+0/3=0/55$$

امید ریاضی

امید ریاضی در ارتباط با بازی‌های شانسی پدید آمد و در ساده‌ترین صورت برابر با حاصل‌ضرب مبلغی که بازیکن امکان برد آن را دارد در احتمال برد آن مبلغ است. به عنوان مثال اگر در یک بخت‌آزمایی که جایزه آن یک یخچال به ارزش ۹۸۰۰۰۰ تومان است، یکی از ۱۰۰۰۰ بلیط را داشته باشیم، انتظار برد مبلغ $۹۸۰۰۰۰\times\frac{۱}{۱۰۰۰۰}=۹۸$ تومان را داریم. این رقم به مفهوم یک مقدار متوسط، مقدار مورد انتظار، مقدار میانگین تعبیر می‌شود. بدین معنا که متوسط مقدار جایزه هر بلیط ۹۸ تومان است. و اگر هر بلیط به مبلغ ۹۸ تومان عرضه شود، در نهایت هیچ سود یا زیانی حاصل نمی‌شود.

❖ **تعریف:** امید ریاضی متغیر تصادفی X با توزیع احتمال $f(x)$ در حالت گسسته و پیوسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(X)=\mu_X=\begin{cases}\sum_x xf(x) & ; \quad \text{اگر } X \text{ گسسته باشد}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & ; \quad \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد}\end{cases}$$

مثال ۳۸: احتمال اینکه شخصی قطعه زمینی را با سود ۳۰۰۰۰ تومان بفروشد $\frac{۳}{۲۰}$، احتمال اینکه آن را با سود برابر ۱۵۰۰۰ تومـان بفروشـد $\frac{۷}{۲۰}$، احتمال اینکه در فروش آن سود یا زیانی حاصل نشود $\frac{۷}{۲۰}$ و احتمال اینکه ۱۵۰۰۰ تومان ضرر کند $\frac{۳}{۲۰}$ است. سود مورد انتظار این شخص کدام است؟

۱) ۷۵۰۰　۲) ۹۰۰۰　۳) ۱۰۵۰۰　۴) ۶۵۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای پاسخ به این سؤال فرض کنید متغیر تصادفی X نشان‌دهنده مقدار سود ناشی از فـروش ایـن قطعـه زمـین باشـد. بنـابراین مقادیری که X اختیار می‌کند برابر است با:

$x=۳۰۰۰۰\ ,\ ۱۵۰۰۰\ ,\ ۰\ ,\ -۱۵۰۰۰$

دقت نمایید که سود ۱۵۰۰۰− تومان معادل ۱۵۰۰۰ تومان ضرر است. بنابراین با توجه به اطلاعات صورت مسئله تابع احتمال X به صورت زیر می‌باشد.

x	۳۰۰۰۰	۱۵۰۰۰	۰	−۱۵۰۰۰
f(x)	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۷}{۲۰}$	$\frac{۷}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$

و چون X گسسته است، $E(X)$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$E(X)=\sum_x xf(x)=۳۰۰۰۰(\frac{۳}{۲۰})+۱۵۰۰۰(\frac{۷}{۲۰})+۰\times(\frac{۷}{۲۰})-۱۵۰۰۰(\frac{۳}{۲۰})=۷۵۰۰$$

مثال ۳۹: X یک متغیر تصادفی با میانگین $\frac{۵}{۴}$ و دارای تابع چگالی احتمال $f(x)=\begin{cases}x^۲ & ; \quad ۰\le x\le ۱\\ b & ; \quad ۱<x<a\\ ۰ & ; \quad \text{سایر مقادیر}\end{cases}$ است. مقادیر a و b کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $b=\frac{۱}{۴}\ ,\ a=۳$　۲) $b=\frac{۱}{۲}\ ,\ a=۲$　۳) $b=\frac{۱}{۳}\ ,\ a=۲$　۴) $b=\frac{۲}{۳}\ ,\ a=۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مقادیر a و b را از دو شرط زیر به دست می‌آوریم:

شرط اول: چون $f(x)$ تابع چگالی X است، پس $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=۱$.

شرط دوم: طبق فرض مسئله $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{۵}{۴}$.

بنابراین از شرط اول داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=۱\Rightarrow\int_۰^۱x^۲dx+\int_۱^a b\,dx=۱\quad\Rightarrow\frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^۱+bx\Big|_۱^a=۱\Rightarrow(\frac{۱}{۳}-۰)+b(a-۱)=۱\Rightarrow b(a-۱)=\frac{۲}{۳}$$

همچنین از شرط دوم داریم:

$$E(X)=\int_۰^۱x(x^۲)dx+\int_۱^a bx\,dx=\frac{۵}{۴}\quad\Rightarrow\frac{x^۴}{۴}\Big|_۰^۱+b(\frac{x^۲}{۲})\Big|_۱^a=\frac{۵}{۴}\Rightarrow(\frac{۱}{۴}-۰)+\frac{b}{۲}(a^۲-۱)=\frac{۵}{۴}\quad\Rightarrow b(a^۲-۱)=۲$$

از شرط اول و دوم، دو معادله $\begin{cases} b(a-۱)=\frac{۲}{۳} \\ b(a^{۲}-۱)=۲ \end{cases}$ به دست می‌آید.

که از حل این دستگاه دو معادله و دو مجهول مقادیر a و b حساب می‌شوند. برای حل دستگاه بالا معادله دوم را به شکل $b(a-۱)(a+۱)=۲$ می‌نویسیم.

لذا داریم:
$$\begin{cases} b(a-۱)=\frac{۲}{۳} \\ b(a-۱)(a+۱)=۲ \end{cases}$$

طرفین معادله اول را به طرفین معادله دوم تقسیم می‌کنیم. تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{b(a-۱)}{b(a-۱)(a+۱)}=\frac{\frac{۲}{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{a+۱}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow a=۲$$

اکنون مقدار b را از معادله اول $b(a-۱)=\frac{۲}{۳}$ به ازای $a=۲$ حساب می‌کنیم. $b(۲-۱)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow b=\frac{۲}{۳}$

توجه نمایید یک روش دیگر یافتن مقادیر a و b، جایگذاری مقادیر گزینه‌ها در دستگاه $\begin{cases} b(a-۱)=\frac{۲}{۳} \\ b(a^{۲}-۱)=۲ \end{cases}$ می‌باشد.

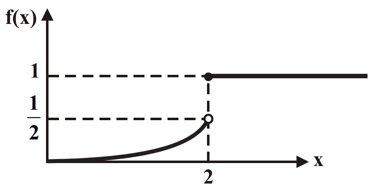
مثال۴۰: متغیر تصادفی X با تابع توزیع (توزیع تجمعی) زیر را در نظر بگیرید. E(X) کدام است؟

$$F(x)=\begin{cases} ۰ & ; \quad x<۰ \\ \frac{x^{۲}}{۸} & ; \quad ۰\le x<۲ \\ ۱ & ; \quad x\ge ۲ \end{cases}$$

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» منحنی $F(x)$ به صورت زیر است. همان‌طور که از شکل مشخص است، $F(x)$ در تمام نقاط فضای نمونه بجز نقطه $x=۲$ پیوسته است. زیرا:



$$F(۲)=۱,\ \lim_{x\to ۲^{+}}F(x)=۱,\ \lim_{x\to ۲^{-}}F(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{x^{۲}}{۸}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow F(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}F(x)\neq \lim_{x\to ۲^{-}}F(x)$$

بنابراین X متغیر تصادفی آمیخته است و مقدار $f(x)$ در نقطه ناپیوسته $x=۲$ با استفاده از رابطه $P(X=a)=F(a)-F(a^{-})$ حساب می‌شود. لذا:

$$P(X=۲)=f(۲)=F(۲)-F(۲^{-})=۱-\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

و چون $F(x)$ در سایر نقاط پیوسته است، در نتیجه $f(x)$ (تابع چگالی X) از رابطه‌ی $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$ به دست می‌آید. پس:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{۴} & ; \quad ۰\le x<۲ \\ \frac{۱}{۲} & ; \quad x=۲ \\ ۰ & ; \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

اکنون با مشخص شدن $f(x)$ برای متغیر تصادفی آمیخته X، حاصل $E(X)$ برای نقاط ناپیوسته از رابطه‌ی $E(X)=\sum_{x} xf(x)$ و برای نقاط پیوسته از رابطه‌ی $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ حساب می شود. لذا داریم:

$$E(X)=\sum_{x=۲} xf(x)+\int_{۰}^{۲} x f(x)dx=۲(\frac{۱}{۲})+\int_{۰}^{۲}\frac{x^{۲}}{۴}dx=۱+(\frac{x^{۳}}{۱۲})\Big|_{۰}^{۲}=۱+(\frac{۸}{۱۲}-۰)=\frac{۵}{۳}$$

ویژگی‌های امید ریاضی

متغیر تصادفی X با توزیع احتمال $f(x)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید a و b اعداد ثابت باشند. دراین صورت ویژگی های زیر برقرار است.

ویژگی ۱) امید ریاضی هر عدد ثابت مانند a برابر a است. یعنی $E(a)=a$

مثال ۴۱: برای متغیر تصادفی X با تابع چگالی $f(x)=\begin{cases}4x^2e^{-2x} & ; \quad x>0\\ 0 & ; \quad \text{سایر نقاط}\end{cases}$ **حاصل $E(\frac{1}{4})$ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» چون $E(a)=a$ است، بنابراین $E(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$ می‌شود.

ویژگی ۲) امید ریاضی متغیر تصادفی $Y=g(X)$ برابر است با:

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum_x g(x)f(x) & ; \quad \text{اگر } x \text{ گسسته باشد}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx & ; \quad \text{اگر } x \text{ پیوسته باشد}\end{cases}$$

مثال ۴۲: اگر چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت $f(x)=\begin{cases}2(1-x) & ; \quad 0<x<1\\ 0 & ; \quad \text{سایر مقادیر}\end{cases}$ **باشد، حاصل $E(X^2)$ کدام است؟**

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه $E(X^2)$ چون X پیوسته است از رابطه $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$ استفاده می‌کنیم.

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2 f(x)dx=\int_0^1 2x^2(1-x)dx=2\int_0^1(x^2-x^3)dx=2(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4})\Big|_0^1=2(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=\frac{1}{6}$$

مثال ۴۳: برای متغیر تصادفی X اگر تابع چگالی برابر $0<x<1$, $f(x)=a+bx^2$ و $E(X^3)=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار a و b کدام است؟

۱) $a=1$, $b=1$ ۲) $a=0$, $b=3$ ۳) $a=3$, $b=0$ ۴) $a=1$, $b=+3$

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه a و b از دو شرط زیر استفاده می‌کنیم.

شرط اول: اگر $f(x)$ تابع چگالی X باشد، $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ می‌شود.

شرط دوم: $E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3 f(x)dx=\frac{1}{2}$

بنابراین از شرط اول داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$

$$\int_0^1(a+bx^2)dx=1 \Rightarrow (ax+b\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=1 \Rightarrow a+\frac{b}{3}=1$$

و از شرط دوم نیز داریم:

$$E(X^3)=\frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^3 f(x)dx=\frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 x^3(a+bx^2)dx=\frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1(ax^3+bx^5)dx=\frac{1}{2} \Rightarrow (a\frac{x^4}{4}+b\frac{x^6}{6})\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\frac{a}{4}+\frac{b}{6})=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2}+\frac{b}{3}=1$$

اکنون از شرط اول و دوم دو معادله $\begin{cases}a+\frac{b}{3}=1\\ \frac{a}{2}+\frac{b}{3}=1\end{cases}$ به دست آمده است که برای حل آن، معادله دوم را در (-1) ضرب کرده و طرفین دو معادله را با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases}a+\frac{b}{3}=1\\ -\frac{a}{3}-\frac{b}{3}=-1\end{cases} \Rightarrow (a-\frac{a}{2})=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow 0+\frac{b}{3}=1 \Rightarrow b=3$$

مثال۴۴: متغیر تصادفی X را با تابع چگالی احتمال مقابل در نظر بگیرید. اگر $Z = 1 + X + X^2 + \cdots$، مقدار $E(Z)$ کدام است؟ $f(x) = 2(1-x)\ ,\quad 0 < x < 1$

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه $x \in (0,1)$ می‌باشد $Z = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ می‌باشد (سری هندسی) بنابراین $E(Z)$ را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$E(Z) = E\left(\frac{1}{1-X}\right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right)(2(1-x))\,dx = \int_0^1 2\,dx = 2x\Big|_0^1 = 2$$

ویژگی۳) امید ریاضی متغیر جدید $Y = aX + b$ برابر است با: $E(Y) = E(aX+b) = aE(X) + b$

ویژگی۴) $E(E(X)) = E(X)$

مثال ۴۵: در یک بازی با پرتاب تاس به اندازه شماره خال‌ها به شما سکه ۱۰۰ ریالی می‌دهند. بلیط هر بازی چند ریال باشد تا شخص بلیط فروش به اندازه $\frac{1}{4}$ سکه‌ها سود ببرد؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) ۳۷۴/۵ ۲) ۴۳۷/۵ ۳) ۴۷۳/۵ ۴) ۷۴۳/۵

پاسخ: گزینه «۲» در این مسئله دو نوع متغیر تصادفی به شکل زیر داریم:

متغیرتصادفی X میزان برد شخص است که به اندازه شماره خال‌ها سکه ۱۰۰ ریالی می‌گیرد. چون در پرتاب تاس، شماره خال‌ها ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و۶ است، پس X مقادیر ۱۰۰،۲۰۰،۳۰۰،۴۰۰،۵۰۰،۶۰۰ را اختیار می‌کند. همچنین متغیر تصادفی Y نشان‌دهنده مبلغ بلیط هر بازی است که بلیط فروش عرضه می‌کند. در صورت مسئله شرط شده که در فروش هر بلیط، فروشنده به اندازه $\frac{1}{4}$ سکه‌ها سود کند. پس اگر بازیکن به میزان X برنده شود، لازم است فروشنده مبلغ بلیط را برابر $Y = X + \frac{1}{4}X = \frac{5}{4}X$ در نظر بگیرید. اکنون به منظور تعیین متوسط بلیط هر بازی، $E(Y)$ را با استفاده از ویژگی $E(Y) = E(\frac{5}{4}X) = \frac{5}{4}E(X)$ حساب می‌کنیم. برای این کار ابتدا تابع احتمال X را تعیین می‌کنیم. چون احتمال ظاهرشدن هر عدد در پرتاب تاس برابر $\frac{1}{6}$ است بنابراین تابع احتمال X برابر است با:

x	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

همچنین $E(X)$ بر طبق رابطه‌ی $E(X) = \sum_x x f(x)$ برابر $E(X) = 100(\frac{1}{6}) + 200(\frac{1}{6}) + 300(\frac{1}{6}) + 400(\frac{1}{6}) + 500(\frac{1}{6}) + 600(\frac{1}{6}) = 350$ می‌شود. یعنی هر شخص به طور متوسط ۳۵۰ ریال خواهد برد. در نتیجه $E(Y)$، متوسط مبلغ هر بلیط برابر $E(Y) = \frac{5}{4}E(X) = \frac{5}{4}(350) = 437/5$ می‌شود.

واریانس

واریانس متغیر تصادفی X نشان‌دهنده میزان پراکندگی مقادیر متغیر تصادفی از شاخص میانگین مقادیر X است. در حالت گسسته و پیوسته واریانس به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

❖ **تعریف:** متغیر تصادفی X با توزیع احتمال $f(x)$ و امید ریاضی μ را در نظر بگیرید. واریانس X را با نماد σ_X^2 یا $Var(X)$ نشان می‌دهیم. و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^2 f(x) & ; \quad \text{اگر } x \text{ گسسته باشد} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx & ; \quad \text{اگر } x \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

واریانس X را با دستور ساده‌تر زیر نیز می‌توان حساب کرد.
$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] = E[(X^2+\mu^2-2\mu X)] = E(X^2)+E(\mu^2)-2\mu E(X)$$
چون $E(\mu^2)=\mu^2$ و $E(X)=\mu$ بنابراین:
$$\sigma_X^2 = E(X^2)+\mu^2-2\mu\mu = E(X^2)-\mu^2$$
در نتیجه داریم:
$$\boxed{\sigma_X^2 = E(X^2)-\mu^2 = E(X^2)-(E(X))^2}$$

انحراف معیار: اگر از واریانس جذر بگیریم، انحراف معیار به دست می‌آید که واحد آن با واحد متغیر تصادفی X برابر است.
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال ۴۶: واریانس متغیر تصادفی X با تابع توزیع تجمعی زیر کدام است؟

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x<-2 \\ 0/2 & ; \quad -2\le x<0 \\ 0/3 & ; \quad 0\le x<2 \\ 0/4 & ; \quad 2\le x<4 \\ 1 & ; \quad x\ge 4 \end{cases}$$

۱) ۵/۹۶
۲) ۶/۸۲
۳) ۴/۶۸
۴) ۶/۲۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه واریانس X از فرمول $\sigma^2 = E(X^2)-(E(X))^2$ استفاده می‌کنیم. برای محاسبه σ^2 نیاز به تابع احتمال $f(x)$ داریم. بنابراین تابع احتمال $f(x)$ را از روی تابع توزیع $F(x)$ به دست می‌آوریم. از تابع توزیع $F(x)$ نتیجه می‌شود مقادیری که X اختیار می‌کند به‌صورت $x=-2,0,2,4$ است. چون X گسسته است، بنابراین تابع احتمال $f(x)$ از روی تابع توزیع $F(x)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$f(x_1)=F(x_1)$$
$$f(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1}) \qquad i=2,\dots,n$$

بنابراین داریم:

$$f(-2)=F(-2)=0/2$$
$$f(0)=F(0)-F(-2)=0/3-0/2=0/1$$
$$f(2)=F(2)-F(0)=0/4-0/3=0/1$$
$$f(4)=F(4)-F(2)=1-0/4=0/6$$

اکنون تابع احتمال X را به صورت تابع جدولی می‌نویسیم.

x	-2	0	2	4	
$f(x)$	$0/2$	$0/1$	$0/1$	$0/6$	
$xf(x)$	$-0/4$	0	$0/2$	$2/4$	$E(X)=\sum xf(x)=-0/4+0+0/2+2/4=2/2$
$x^2f(x)$	$0/8$	0	$0/4$	$9/6$	$E(X^2)=\sum x^2f(x)=0/8+0+0/4+9/6=10/8$

در نتیجه مقدار واریانس X برابر $\sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2=10/8-(2/2)^2=5/96$ است.

مثال ۴۷: واریانس متغیر تصادفی X با تابع چگالی زیر کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & ; \quad 0<x<2 \\ 0 & ; \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) ۲
۴) $\frac{2}{9}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه واریانس X از رابطه $\sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2$ استفاده می‌کنیم. بنابراین ابتدا $E(X)$ و $E(X^2)$ را با روابط زیر حساب می‌کنیم.
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \ , \ E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx$$

$$E(X)=\int_0^2 x(\frac{x}{2})dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^2=\frac{1}{6}(8-0)=\frac{4}{3} \qquad E(X^2)=\int_0^2 x^2(\frac{x}{2})dx=\frac{1}{8}x^4\Big|_0^2=\frac{1}{8}(16-0)=2$$

در نتیجه داریم:
$$\sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$$

درسنامه (۳): توزیع‌های شرطی

در فصل اول احتمال وقوع پیشامد A به شرط آنکه بدانیم $B \neq \phi$ رخ داده باشد، به‌صورت $P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ تعریف شد. در اینجا برای متغیرهای تصادفی X و Y اگر $X=x$ پیشامد A, $Y=y$ پیشامد B باشد، در این صورت احتمال آنکه $X=x$ باشد به شرط آنکه بدانیم $Y=y$ است، به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$P(X=x|Y=y)=f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

که در آن $f(x,y)$ تابع احتمال توأم X و Y در نقطه (x,y) است. توجه نمایید که در احتمال شرطی $f(x|y)$، X متغیر و مقدار y تثبیت شده است.

❖ **تعریف:** اگر $f(x,y)$ مقدار توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y در نقطه (x,y) و $f_Y(y)$ توزیع حاشیه‌ای Y در نقطه y باشد، در این صورت توزیع شرطی X به شرط آنکه $Y=y$ باشد برابر است با:

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

مشابهاً توزیع شرطی Y به شرط آنکه $X=x$ باشد برابر است با:

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

که در آن $f_X(x)$ توزیع حاشیه‌ای X در نقطه x است.

مثال ۷۹: فرض کنید X و Y دارای تابع احتمال توأم به‌صورت زیر باشند. مقدار $P(X=۱|Y=۱)$ و $P(X=۲|Y=۲)$ به‌ترتیب کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۵)

x \ y	۱	۲
۱	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۳}$
۲	$\frac{۱}{۶}$	a

۱) $\frac{۳}{۷}$, $\frac{۳}{۵}$　　۲) $\frac{۳}{۵}$, $\frac{۳}{۷}$

۳) a , $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۱}{۴}$, a

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا مقدار ثابت a را با توجه به اینکه X و Y گسسته‌اند با استفاده از رابطه‌ی $\sum_x \sum_y f(x,y)=۱$ به دست می‌آوریم.

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

اکنون حاصل $P(X=۱|Y=۱)$ را با استفاده از رابطه‌ی $P(X=x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ حساب می‌کنیم. لذا:

$$P(X=۱|Y=۱)=\frac{f(۱,۱)}{f_Y(۱)}$$

مقدار $f(۱,۱)$ برابر $f(۱,۱)=P(X=۱,Y=۱)=\frac{۱}{۴}$ و حاصل $f_Y(۱)$، تابع احتمال حاشیه‌ای Y در نقطه $Y=۱$ طبق تعریف برابر $f_Y(۱)=\sum_{x=۱}^{۲} f(x,۱)=f(۱,۱)+f(۲,۱)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۱۲}$ می‌شود. لذا:

$$P(X=۱|Y=۱)=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۳}{۵}$$

با توجه به گزینه‌ها، نیازی به محاسبه $P(X=۲|Y=۲)$ نمی‌باشد. قطعاً حاصل آن $\frac{۳}{۷}$ خواهد بود.

مثال۸۰: برای X و Y با تابع احتمال توأم زیر، حاصل $P(Y \geq ۰ \mid X < ۱)$ کدام است؟

x \ y	-۱	۰	۱
-۱	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$
۰	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$
۲	۰	$\frac{۲}{۱۵}$	۰

۱) $\frac{۱۰}{۱۳}$

۲) $\frac{۷}{۱۳}$

۳) $\frac{۹}{۱۳}$

۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه «۱» طبق تعریف احتمال شرطی، حاصل $P(Y \geq ۰ \mid X < ۱)$ برابر $P(Y \geq ۰ \mid X < ۱) = \frac{P(X < ۱\ ,\ Y \geq ۰)}{P(X < ۱)}$ می‌باشد. بنابراین لازم است $P(X < ۱\ ,\ Y \geq ۰)\ ,\ P(X < ۱)$ حساب شوند.

$$P(X < ۱\ ,\ Y \geq ۰) = P(X = -۱, Y = ۰) + P(X = ۰, Y = ۰) + P(X = -۱, Y = ۱) + P(X = ۰\ ,\ Y = ۱) = \frac{۳}{۱۵} + \frac{۲}{۱۵} + \frac{۲}{۱۵} + \frac{۳}{۱۵} = \frac{۱۰}{۱۵}$$

و همچنین حاصل $P(X < ۱)$ برابر $P(X < ۱) = P(X = -۱) + P(X = ۰)$ است. که در آن $P(X = -۱)$ و $P(X = ۰)$ از روی تابع احتمال حاشیه‌ای X به‌دست می‌آید. تابع احتمال حاشیه‌ای X برابر مقادیر زیر است.

x	-۱	۰	۲
$P(X = x)$	$\frac{۲}{۱۵} + \frac{۳}{۱۵} + \frac{۲}{۱۵} = \frac{۷}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵} + \frac{۲}{۱۵} + \frac{۳}{۱۵} = \frac{۶}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$

پس $P(X < ۱) = P(X = -۱) + P(X = ۰) = \frac{۷}{۱۵} + \frac{۶}{۱۵} = \frac{۱۳}{۱۵}$ و در نتیجه:

$$P(Y \geq ۰ \mid X < ۱) = \frac{\frac{۱۰}{۱۵}}{\frac{۱۳}{۱۵}} = \frac{۱۰}{۱۳}$$

مثال ۸۱: اگر متغیر تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توأم $f(x,y) = \begin{cases} ۳xy & ; \quad ۰ < x < ۱\ ,\ ۰ < y < ۲x^۲ \\ ۰ & ; \quad \text{سایر نقاط} \end{cases}$ باشد، حاصل $P(\frac{۱}{۲} < X < ۱ \mid Y = \frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) ۰/۸۸ ۲) ۰/۶۲ ۳) ۰/۹ ۴) ۰/۷۵

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه $P(\frac{۱}{۲} < X < ۱ \mid Y = \frac{۱}{۳})$، ابتدا تابع چگالی شرطی $f(x \mid y = \frac{۱}{۳})$ را به‌دست می‌آوریم. سپس حاصل احتمال خواسته شده را با استفاده از رابطه‌ی $P(\frac{۱}{۲} < X < ۱ \mid Y = \frac{۱}{۳}) = \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} f(x \mid y = \frac{۱}{۳})dx$ حساب می‌کنیم. طبق تعریف، تابع احتمال شرطی $f(x \mid y)$ برابر است با:

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

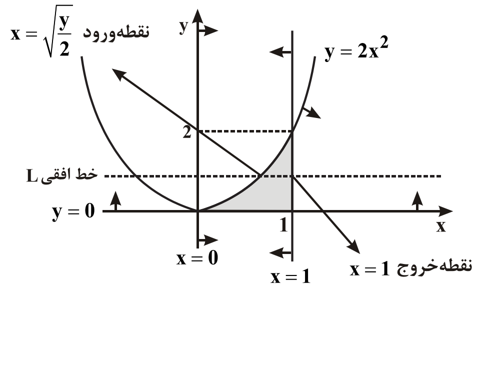
$f_Y(y)$ تابع احتمال حاشیه‌ای Y می‌باشد، که به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

چون انتگرال بالا برحسب x است، پس لازم است حدود x را با رسم ناحیه انتگرال تعیین کنیم. ناحیه انتگرال شامل اشتراک محدودیت‌های زیر است.

$۰ < x < ۱$

$۰ < y < ۲x^۲$



برای تعیین حدود x خط افقی L را در جهت افزایش x بر ناحیه انتگرال رسم می‌کنیم. جایی‌که برحسب x وارد ناحیه انتگرال می‌شویم، از معادله $y=2x^2$ به‌دست می‌آید. $y=2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{y}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{y}{2}}$

سهمی $y=2x^2$ شامل دو شاخه $x=\sqrt{\frac{y}{2}}$ و $x=-\sqrt{\frac{y}{2}}$ است و $x>0$ است، پس $x=\sqrt{\frac{y}{2}}$ نقطه‌ای است که در آن وارد ناحیه انتگرال می‌شویم.

و جایی که برحسب x از ناحیه انتگرال خارج می‌شویم $x=1$ است. پس حدود x به شکل $\sqrt{\frac{y}{2}}<x<1$ است. با تعیین حدود x حاصل $f_Y(y)$ برابر است با:

$$f_Y(y)=\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1} 3xy\,dx=\frac{3}{2}x^2y\Big|_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1}=\frac{3}{2}y(1-\frac{y}{2})$$

و همچنین حاصل $f(x\,|\,y)$ برابر می‌شود با:

$$f(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{3xy}{\frac{3}{2}y(1-\frac{y}{2})}=\frac{2x}{1-\frac{y}{2}}\quad,\ \sqrt{\frac{y}{2}}\le x\le 1\quad \Rightarrow f(x\,|\,y=\frac{1}{3})=\frac{2x}{1-\frac{\frac{1}{3}}{2}}=\frac{12}{5}x\ ,\ \sqrt{\frac{1}{6}}\le x\le 1$$

در نتیجه:

$$P(\frac{1}{2}<X<1\,|\,Y=\frac{1}{3})=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x\,|\,y=\frac{1}{3})dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{12}{5}x\,dx=\frac{6}{5}x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{6}{5}(1-\frac{1}{4})=0/9$$

مثال ۸۲: متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه (۰,۱) می‌باشد. متغیر تصادفی Y با احتمال یکنواخت در بازه (۰,x) انتخاب می‌شود. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y در نقطه $Y=\frac{1}{2}$ چه مقداری دارد؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $2\text{Ln}2$ ۴) $\text{Ln}2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» متغیر تصادفی پیوسته X در فاصله (a,b) دارای توزیع یکنواخت است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\ ; & a<x<b\\ 0\ ; & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$ باشد. طبق فرض مسئله، X در فاصله (۰,۱) دارای توزیع یکنواخت است. بنابراین تابع چگالی X برابر $f(x)=\frac{1}{1-0}=1\ ,\ 0<x<1$ است. همچنین Y با احتمال یکنواخت در فاصله $(0,x)$ انتخاب می‌شود، پس چگالی احتمال Y به شرط آنکه $X=x$ باشد، برابر $f(y\,|\,x)=\frac{1}{x-0}=\frac{1}{x}\ ,\ 0<y<x$ می‌شود.

اکنون برای محاسبه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y در نقطه $y=\frac{1}{2}$ یعنی $f_Y(\frac{1}{2})$، ابتدا تابع چگالی توأم $f(x,y)$ را با استفاده از رابطه $f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ به‌دست می‌آوریم، سپس تابع احتمال حاشیه‌ای Y یعنی $f_Y(y)$ را به کمک فرمول $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ حساب می‌کنیم که با محاسبه $f_Y(y)$ حاصل $f_Y(\frac{1}{2})$ به‌دست می‌آید. لذا:

$$f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{f(x,y)}{1}\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{x}\qquad 0<x<1\ ,\ 0<y<x$$

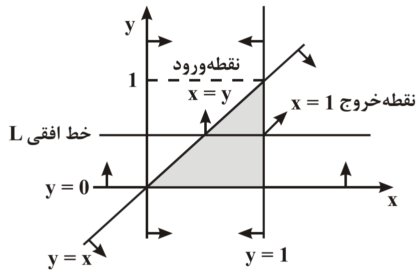
و $f_Y(y)$ تابع چگالی حاشیه‌ای Y برابر می‌شود با:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

انتگرال بالا برحسب x است. پس لازم است حدود x را با رسم ناحیه انتگرال تعیین کنیم.

ناحیه انتگرال شامل اشتراک محدودیت‌های زیر است.

$$\circ < x < 1$$
$$\circ < y < x$$



برای تعیین حدود x خط افقی L را در جهت افزایش x رسم می‌کنیم. جایی‌که برحسب x وارد ناحیه انتگرال می‌شویم، $x = y$ و جایی‌که برحسب x از ناحیه انتگرال خارج می‌شویم، $x = 1$ است. پس حدود x به شکل $y \le x \le 1$ است. در نتیجه:

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}dx = Ln|x|\Big|_y^1 = Ln1 - Ln|y| = -Ln|y| = -Lny$$

توجه نمایید که $\circ < y < 1$ است. در نتیجه $Ln|y| = Lny$ است.

$$\Rightarrow\ f_Y(\frac{1}{2}) = -Ln\frac{1}{2} = Ln2$$

احتمال شرطی برای توابع احتمال n متغیره

می‌توان احتمال شرطی را برای توابع احتمال با بیش از دو متغیر تصادفی تعمیم داد و انواع متفاوت از توزیع‌های شرطی را حساب کرد. به‌عنوان مثال متغیر تصادفی X_1، X_2، X_3 و X_4 با تابع احتمال توأم $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ را در نظر بگیرید. در این صورت توزیع شرطی X_3 به شرط آنکه $X_1 = x_1$ ، $X_2 = x_2$ و $X_4 = x_4$ باشد، برابر است با:

$$f(x_3 | x_1, x_2, x_4) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{g(x_1, x_2, x_4)}$$

که در آن $g(x_1, x_2, x_4)$ تابع توزیع حاشیه‌ای توأم X_1، X_2 و X_4 است.

همچنین توزیع شرطی X_2, X_4 به شرط آنکه $X_1 = x_1$ و $X_3 = x_3$ باشد، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f((x_2, x_4) | x_1, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{g(x_1, x_3)}$$

که در آن $g(x_1, x_3)$ تابع احتمال توأم حاشیه‌ای X_1 و X_3 است.

مثال ۸۳: برای توزیع احتمال توأم $f(x,y,z) = \frac{xyz}{108}$ ، $x = 1,2,3$، $y = 1,2,3$، $z = 1,2$، توزیع شرطی Z به شرط آنکه $X = 1$ ، $Y = 2$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{z}{3}$ ، $z = 1,2$ ۲) $\frac{z+1}{5}$ ، $z = 1,2$ ۳) $\frac{2z+1}{8}$ ، $z = 1,2$ ۴) $\frac{z+2}{7}$ ، $z = 1,2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» احتمال Z به شرط $X = 1$ و $Y = 2$، یعنی $P(Z = z | X = 1\ ,\ Y = 2)$ را با استفاده از رابطه‌ی زیر حساب می‌کنیم:

$$P(Z = z | X = 1\ ,\ Y = 2) = \frac{P(X = 1\ ,\ Y = 2\ ,\ Z = z)}{g(x = 1\ ,\ y = 2)} = \frac{f(1,2,z)}{g(x = 1\ ,\ y = 2)}$$

$g(x = 1\ , y = 2)$، توزیع حاشیه‌ای X و Y است که به شکل زیر حساب می‌شود.

$$g(x,y) = \sum_{z=1}^{2} f(x,y,z) = f(x,y,1) + f(x,y,2) = \frac{xy}{108} + \frac{2xy}{108} = \frac{3xy}{108} \Rightarrow g(x = 1\ ,\ y = 2) = \frac{3(1)(2)}{108} = \frac{1}{18}$$

همچنین حاصل $f(1,2,z)$ برابر $z = 1,2$ ، $f(1,2,z) = \frac{1(2)z}{108} = \frac{z}{54}$ است، در نتیجه:

$$P(Z = z | X = 1\ ,\ Y = 2) = \frac{f(1,2,z)}{g(x = 1\ ,\ y = 2)} = \frac{\frac{z}{54}}{\frac{1}{18}} = \frac{z}{3}\ ,\ z = 1,2$$

مثال ۸۴: برای متغیرهای تصادفی X، Y و Z با چگالی مشترک زیر، حاصل چگالی شرطی Y به شرط $X=\frac{۱}{۲}$ و $Z=۲$ کدام است؟

$$f(x,y,z)=\begin{cases}(x+y)e^{-z} & ; \circ<x<۱ , \circ<y<۱ , z>\circ \\ \circ & ; \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

۱) $۲-۲y \ , \ \circ<y<۱$ ۲) $y+\frac{۱}{۲} \ , \ \circ<y<۱$

۳) $\frac{۴}{۳}y+\frac{۱}{۳} \ , \ \circ<y<۱$ ۴) $۲y \ , \ \circ<y<۱$

پاسخ: گزینه «۲» طبق تعریف، احتمال شرطی Y به شرط آنکه $X=\frac{۱}{۲} \ , \ Z=۲$ باشد، با دستور زیر حساب می‌شود.

$$P(Y=y|X=\frac{۱}{۲} \ , \ Z=۲)=\frac{f(\frac{۱}{۲},y,۲)}{g(x=\frac{۱}{۲},z=۲)}$$

چون $f(x,y,z)=(x+y)e^{-z}$ است پس $f(\frac{۱}{۲},y,۲)=(\frac{۱}{۲}+y)e^{-۲}$ می‌شود. همچنین $g(x,z)$، توزیع حاشیه‌ای توأم X و Z به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$g(x,z)=\int_\circ^۱ f(x,y,z)dy=\int_\circ^۱ (x+y)e^{-z}dy=(xy+\frac{۱}{۲}y^۲)e^{-z}\Big|_\circ^۱=(x+\frac{۱}{۲})e^{-z} \Rightarrow g(x=\frac{۱}{۲} \ , \ z=۲)=(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲})e^{-۲}=e^{-۲}$$

در نتیجه:

$$P(Y=y|X=\frac{۱}{۲} \ , \ Z=۲)=\frac{(\frac{۱}{۲}+y)e^{-۲}}{e^{-۲}}=y+\frac{۱}{۲} \ , \ \circ<y<۱$$

استقلال متغیرهای تصادفی

متغیرهای تصادفی X و Y با تابع احتمال توأم $f(x,y)$ را در نظر بگیرید. X و Y مستقلند، اگر و تنها اگر $f(x|y)=f_X(x)$ و $f(y|x)=f_Y(y)$ باشد که در آن $f_X(x)$ توزیع حاشیه‌ای X و $f_Y(y)$ توزیع حاشیه‌ای Y است. چون $f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ می‌باشد، بنابراین در رابطه‌ی $f(x|y)=f_X(x)$ به جای $f(x|y)$ معادل آن $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ را قرار می‌دهیم. در نتیجه: $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x) \Rightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

❖ **تعریف:** متغیرهای تصادفی X و Y با توزیع مشترک (توأم) $f(x,y)$ مستقلند اگر و تنها اگر تساوی $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ برای تمام مقادیر X و Y برقرار باشد. تعریف بالا قابل تعمیم به n متغیر تصادفی است. متغیرهای تصادفی $X_۱،X_۲،...،X_n$ با توزیع احتمال مشترک $f(x_۱,...,x_n)$ مستقلند اگر و تنها اگر: $f(x_۱,\cdots,x_n)=f_{X_۱}(x_۱)\times\cdots\times f_{X_n}(x_n)$

مثال ۸۵: آیا X و Y با تابع احتمال توأم زیر مستقل هستند؟

(x,y)	$(-۱,۲)$	$(-۱,۳)$	$(۱,۲)$	$(۱,۳)$
$f(x,y)$	۰/۲	۰/۲	۰/۳	۰/۳

پاسخ: شرط استقلال $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ را برای تمام مقادیر $x=-۱,۱ \ , \ y=۲,۳$ بررسی می‌کنیم. ابتدا توزیع حاشیه‌ای X و Y را به‌دست می‌آوریم.

x	-۱	۱
$f_X(X)$	$۰/۲+۰/۲=۰/۴$	$۰/۳+۰/۳=۰/۶$

y	۲	۳
$f_Y(y)$	$۰/۲+۰/۳=۰/۵$	$۰/۲+۰/۳=۰/۵$

اکنون تساوی $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ را برای تمام مقادیر X و Y بررسی می‌کنیم.

$$f(-۱,۲)=۰/۲ \ , \ f_X(-۱)=۰/۴ \ , f_Y(۲)=۰/۵ \ , \ ۰/۲=۰/۴\times۰/۵ \Rightarrow f(-۱,۲)=f_X(-۱)f_Y(۲)$$

$$f(-۱,۳)=۰/۲ \ , \ f_X(-۱)=۰/۴ \ , f_Y(۳)=۰/۵ \ , ۰/۲=۰/۴\times۰/۵ \Rightarrow f(-۱,۳)=f_X(-۱)f_Y(۳)$$

$$f(۱,۲)=۰/۳ \ , \ f_X(۱)=۰/۶ \ , f_Y(۲)=۰/۵ \ , \ ۰/۳=۰/۶\times۰/۵ \Rightarrow f(۱,۲)=f_X(۱)f_Y(۲)$$

$$f(۱,۳)=۰/۳ \ , \ f_X(۱)=۰/۶ \ , f_Y(۳)=۰/۵ \ , ۰/۳=۰/۶\times۰/۵ \Rightarrow f(۱,۳)=f_X(۱)f_Y(۳)$$

این نشان می‌دهد که شرط $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ برای تمام مقادیر X و Y برقرار است. بنابراین X و Y مستقلند.

مثال۸۶: اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با چگالی‌های حاشـیه‌ای $f_X(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲} & ; \ ۰<x<۲ \\ ۰ & ; \ \text{سایر نقاط}\end{cases}$ و $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{۱}{۳} & ; \ ۰<y<۳ \\ ۰ & ; \ \text{سایر نقاط}\end{cases}$ باشـند، حاصل $P(X+Y>\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۴۷}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۴۸}$ ۳) $\frac{۵۸}{۶۴}$ ۴) $\frac{۶۳}{۶۴}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا $f(x,y)$، تابع چگالی توأم X و Y را با استفاده از شرط استقلال $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ به دست می‌آوریم.

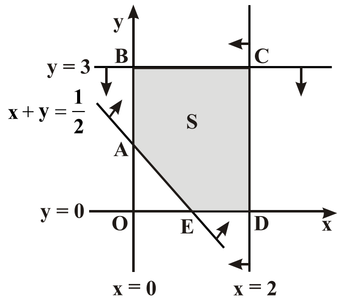
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶} & ; \ ۰<x<۲ \ , \ ۰<y<۳ \\ ۰ & ; \ \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

برای محاسبه $P(X+Y>\frac{۱}{۲})$، ناحیه انتگرال را که شامل اشتراک محدودیت‌های زیر می‌باشد، رسم می‌کنیم.

$۰<x<۲$

$۰<y<۳$

$x+y>\frac{۱}{۲}$



حاصل $P(X+Y>\frac{۱}{۲})$ را با استفاده از رابطه‌ی $P(X+Y>\frac{۱}{۲})=\iint_R f(x,y)dxdy$ حساب می‌کنیم. چون $f(x,y)=\frac{۱}{۶}$ پس:

$$P(X+Y>\frac{۱}{۲})=\iint_R \frac{۱}{۶}dxdy=\frac{۱}{۶}\iint_R ۱dxdy$$

عبارت $\iint ۱dxdy$، برابر مساحت ناحیه انتگرال است، یعنی $\iint_R ۱dxdy=S_{ABCDE}$. چون مساحت مستطیل $OBCD$ برابر $S_{OBCD}=۳\times۲=۶$ و مساحت مثلث OAE برابر $S_{OAE}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}$ است، بنابراین:

$$S_{ABCDE}=S_{OBCD}-S_{OAE}=۶-\frac{۱}{۸}=\frac{۴۷}{۸}$$

در نتیجه داریم:

$$\iint_R ۱dxdy=\frac{۴۷}{۸} \Rightarrow P(X+Y>\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۶}\iint_R ۱dxdy=\frac{۱}{۶}(\frac{۴۷}{۸})=\frac{۴۷}{۴۸}$$

مثال ۸۷: X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم و با توزیع یکنواخت یکسان در بازه $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ می‌باشند. اگر $Z=X+Y$ باشد، در ایـن صـورت مقدار $P(Z<-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به رابطه‌ی $Z=X+Y$ برای محاسبه $P(Z<-\frac{۱}{۲})$ یا $P(X+Y<-\frac{۱}{۲})$، ابتدا تابع چگالی توأم X و Y یعنی $f(x,y)$ را با استفاده از شرط استقلال $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ به دست می‌آوریم.

سپس حاصل $P(X+Y<-\frac{۱}{۲})$ را به کمک رابطه‌ی $P(X+Y<-\frac{۱}{۲})=\iint_R f(x,y)dxdy$ حساب می‌کنیم. طبق فرض مسئله X و Y دارای توزیع یکنواخت در فاصله $[-\frac{۱}{۲} \ , \ \frac{۱}{۲}]$ هستند. پس چگالی احتمالی X برابر:

$$f_X(x)=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}-(-\frac{۱}{۲})}=۱ \quad \text{و} \quad -\frac{۱}{۲}\le x\le\frac{۱}{۲}$$

مدرسان شریف

فصل سوم

«توزیع‌های احتمال خاص»

مقدمه

در این فصل دسته‌ای از توزیع‌های احتمال که دارای نام استاندارد هستند، همراه با معروف‌ترین پارامترهای آنها که عبارتند از: میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاور ارائه شده است. این توزیع‌های خاص به دو دسته گسسته و پیوسته تقسیم می‌شوند و در نظریه آمار دارای کاربردهای بسیار زیادی هستند. این فصل در دو بخش جداگانه ارائه شده است. بخش اول شامل توزیع‌های احتمال گسسته و بخش دوم شامل توزیع‌های احتمال پیوسته می‌باشد.

درسنامه (۱): توزیع‌های احتمال گسسته

این توزیع‌ها مربوط به متغیرهای تصادفی با مقادیر گسسته بوده و شامل موارد زیر می‌باشد.

توزیع احتمال یکنواخت گسسته

اگر متغیر تصادفی X بتواند n مقدار مختلف $x_1, x_2, ..., x_n$ را با احتمال‌های برابر اختیار نماید، می‌گوییم X دارای توزیع یکنواخت گسسته است. به عنوان مثال فرض کنید ظرفی شامل ۴ کارت به شماره‌های ۱ تا ۴ است. به تصادف یک کارت انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X، نشان‌دهنده‌ی عدد روی کارت انتخابی باشد، در این صورت X هریک از اعداد ۱ تا ۴ را با احتمال برابر $\frac{1}{4}$ اختیار می‌کند. در این حالت X دارای توزیع یکنواخت گسسته با تابع احتمال

x	۱	۲	۳	۴
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

است.

❖ **تعریف:** متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته است، اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; \quad x = x_1, x_2, ..., x_n \\ 0 & ; \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

در حالت خاص اگر X مقادیر $1, 2, ..., n$ را اختیار نماید، تابع احتمال X به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; \quad x = 1, 2, ..., n \\ 0 & ; \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

که به آن تابع احتمال یکنواخت گسسته استاندارد می‌گویند.

ویژگی‌های توزیع احتمال یکنواخت گسسته استاندارد

فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت گسسته با مقادیر $1, 2, ..., n$ باشد. در این صورت داریم:

۱) $E(X) = \frac{n+1}{2}$

۲) $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$

۳) $M_X(t)=E(e^{tX})=\dfrac{e^t(1-e^{nt})}{n(1-e^t)}$ ۴) $\phi_X(t)=E(e^{itX})=\dfrac{e^{it}(1-e^{nit})}{n(1-e^{it})}$

مثال۱: برای متغیر تصادفی X با تابع احتمال زیر، حاصل واریانس X کدام است؟

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{11} & ; \quad x=1,2,\dots,11\\ 0 & ; \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به تابع احتمال داده شده نتیجه می‌شود X دارای توزیع یکنواخت گسسته استاندارد به ازای $n=11$ است. بنابراین واریانس X برابر است با:

$$\sigma_X^2=\frac{n^2-1}{12}=\frac{121-1}{12}=10$$

مثال۲: برای متغیر تصادفی X با تابع احتمال زیر، حاصل E(X) کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & ; \quad x=0,1,2,\dots,n\\ 0 & ; \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۱) $\frac{n}{2}$ ۲) $\frac{n+1}{2}$ ۳) $\frac{n-1}{2}$ ۴) $\frac{n+2}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

روش اول: متغیر تصادفی Y را به‌صورت $Y=X+1$ در نظر می‌گیریم. در این صورت مقادیری که Y اختیار می‌کند برابر است با:

$$y=1,2,\dots,n+1$$

اکنون تابع احتمال Y را به‌دست می‌آوریم:

$$P(Y=1)=P(X=0)=\frac{1}{n+1}$$

$$P(Y=2)=P(X=1)=\frac{1}{n+1}$$

$$\vdots$$

$$P(Y=n+1)=P(X=n)=\frac{1}{n+1}$$

این نشان می‌دهد Y دارای تابع احتمال به‌صورت $y=1,\dots,n+1$ و $f(y)=\frac{1}{n+1}$ است. پس Y دارای توزیع یکنواخت گسسته استاندارد است. در نتیجه $E(Y)$ برابر است با:

$$E(Y)=\frac{(n+1)+1}{2}=\frac{n+2}{2}$$

اکنون $E(X)$ را با استفاده از تساوی $Y=X+1$ به‌دست می‌آوریم:

$$E(Y)=E(X+1)=E(X)+1 \Rightarrow E(X)=E(Y)-1=\frac{n+2}{2}-1=\frac{n+2-2}{2}=\frac{n}{2}$$

روش دوم: X دارای تابع احتمال به شکل زیر است:

x	0	1	...	n
f(x)	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{n+1}$	...	$\frac{1}{n+1}$

$E(X)$ را با استفاده از تعریف $E(X)=\sum_{x=0}^{n} x f(x)$ حساب می‌کنیم:

$$E(X)=0(\frac{1}{n+1})+1(\frac{1}{n+1})+2(\frac{1}{n+1})+\dots+n(\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}(1+2+\dots+n)$$

چون $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ است، بنابراین:

$$E(X)=\frac{1}{n+1}(\frac{n(n+1)}{2})=\frac{n}{2}$$

توزیع برنولی

فرض کنید سکه‌ای یک‌مرتبه پرتاب شود. در این صورت شیر یا خط ظاهر می‌شود. به عبارت دیگر نتیجه چنین آزمایش تصادفی شامل تنها دو برآمد شیر یا خط است. اکنون اگر متغیر تصادفی X نشان‌دهنده‌ی تعداد شیرهای ظاهر شده باشد و برآمد شیر را موفقیت بدانیم، آنگاه X فقط مقادیر ۰ و ۱ را می‌تواند اختیار نماید. چنین آزمایش تصادفی را که شامل تنها دو برآمد پیروزی یا شکست باشد، آزمایش برنولی می‌گویند.

❖ **تعریف:** اگر آزمایش تصادفی شامل تنها دو برآمد پیروزی یا شکست و متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد پیروزی‌ها باشد، در این صورت X دارای توزیع برنولی است و تابع احتمال آن به‌صورت مقابل می‌باشد.

$$f(x)=p^x q^{1-x} \quad , \quad x=0,1$$

که در آن $P(x=1)=p$، احتمال پیروزی و $P(x=0)=q$، احتمال شکست می‌باشد و داریم:

$$p+q=1 \;\;,\;\; 0\le p\le 1 \;\;,\;\; 0\le q\le 1$$

ویژگی‌های توزیع برنولی:

فرض کنید، $X \sim B(p)$ (X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است). در این صورت:

۱) $E(X)=p$

۲) $Var(X)=pq$

۳) $M_X(t)=E(e^{tX})=q+pe^t$

۴) $\phi_X(t)=E(e^{itX})=q+pe^{it}$

۵) $E(X^k)=p \;,\; k=1,2,\cdots,n$

۶) $Var(X^2)=pq \;,\; k=1,2,...,n$

✍ **مثال ۳: اگر X دارای توزیع برنولی با پارامتر p باشد مقدار $\sum_{i=1}^{n} E(\frac{X^i}{1+X})$ کدام است؟** (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{np}{2}$ ۲) $n(1-p^2)$ ۳) $\frac{p}{q}(1-p^{n-1})$ ۴) $\frac{q}{p}(1-q^{n-1})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای پاسخ به این سؤال $Y_i=\frac{X^i}{1+X} \;,\; i=1,2,...,n$ را در نظر می‌گیریم. چون X دارای توزیع برنولی است، پس $x=0,1$ است. اکنون مقادیری که Y_iها اختیار می‌کنند با استفاده از تساوی $Y_i=\frac{X^i}{1+X}$ حساب می‌کنیم.

$$x=0 \Rightarrow y_i=\frac{0}{1+0}=0$$

$$x=1 \Rightarrow y_i=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

همچنین تابع احتمال Y_i به‌صورت زیر است:

$$P(Y_i=0)=P(X=0)=q \quad , \quad i=1,2,...,n$$

$$P(Y_i=\frac{1}{2})=P(X=1)=p \quad , \quad i=1,2,...,n$$

Y_i	0	$\frac{1}{2}$
$f(y_i)$	q	p

$i=1,2,\ldots,n$

بنابراین $E(Y_i)$ برابر می‌شود با:

$$E(Y_i)=\sum_{y_i=0,\frac{1}{2}} y_i f(y_i)=0f(0)+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=0(q)+\frac{1}{2}(p)=\frac{p}{2} \quad , \quad i=1,2,...,n$$

در نتیجه:

$$\sum_{i=1}^{n} E(\frac{X^i}{1+X})=\sum_{i=1}^{n} E(Y_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{p}{2}=\frac{np}{2}$$

✍ **مثال ۴: اگر X دارای توزیع برنولی با پارامتر p باشد، حاصل عبارت $E[(X^n-1)(X^n+1)]$ کدام است؟**

۱) $-q$ ۲) $p^{2n}-1$ ۳) p^{2n} ۴) $1-p$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای پاسخ به این سؤال با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$E[(X^n-1)(X^n+1)]=E(X^{2n}-1)=E(X^{2n})-1$$

در توزیع برنولی ویژگی $E(X^k)=p$ برقرار است. بنابراین برای $k=2n$، $E(X^{2n})=p$ بوده و در نتیجه:

$$E(X^{2n})-1=p-1=-q$$

توزیع احتمال دوجمله‌ای

فرض کنید سکه‌ای چهار مرتبه پرتاب شود و متغیر تصادفی X نشان‌دهنده‌ی تعداد شیرهای ظاهر شده در چهار پرتاب این سکه باشد. بنابراین ممکن است در چهار پرتاب این سکه اصلاً شیر ظاهر نشود، ممکن است یک مرتبه، دو مرتبه، سه مرتبه و یا چهار مرتبه شیر ظاهر شود. در نتیجه مقادیری که X می‌تواند اختیار نماید برابر $x=۰,۱,۲,۳,۴$ است. به چنین متغیرهایی، متغیر تصادفی دوجمله‌ای می‌گویند.

در اینجا آزمایش تصادفی مربوط به پرتاب یک مرتبه سکه آزمایش برنولی است، زیرا نتیجه‌ی آن تنها شامل دو برآمد شیر یا خط است. و اگر این آزمایش n مرتبه و مستقل از هم تکرار شود به آن توزیع دوجمله‌ای می‌گویند.

❖ **تعریف:** اگر آزمایش برنولی n بار و مستقل از هم تکرار شود و متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد پیروزی‌ها باشد، در این صورت X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامتر n و p بوده و احتمال کسب x پیروزی در n آزمایش برنولی برابر است با:

$$p(X=x)=f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad , \qquad x=۰,۱,۲,...,n$$

که در آن p احتمال پیروزی و q احتمال شکست در هر آزمایش برنولی است و داریم:

$$۰\le q\le ۱ \quad \text{و} \quad ۰\le p\le ۱ \qquad p+q=۱$$

مثال۵: طول عمر یک لامپ رادیویی برحسب ساعت، یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(x)=\begin{cases}\frac{۱۰۰}{x^۲} & ; \quad x>۱۰۰\\ ۰ & ; \quad x\le ۱۰۰\end{cases}$ **است. با فرض کارکرد مستقل لامپ‌های موجود در رادیو، احتمال آنکه ۲ لامپ از ۵ لامپ موجود در رادیو در اولین ۱۵۰ ساعت کارکرد، معیوب شوند کدام است؟**

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{۱۲۰}{۲۴۳}$ ۲) $\frac{۴۰}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۶}{۲۴۳}$ ۴) $\frac{۸۰}{۲۴۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون هر لامپ انتخابی یا در اولین ۱۵۰ ساعت کارکرد معیوب می‌شود (پیروزی) یا در اولین ۱۵۰ ساعت کارکرد معیوب نمی‌شود (شکست)، بنابراین برای تعداد ۵ لامپ، اگر Y نشان‌دهنده تعداد لامپ‌ها با طول عمر حداکثر ۱۵۰ ساعت باشد، در این صورت Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامتر $n=۵$ و پارامتر مجهول p (احتمال پیروزی) است که در آن p (احتمال پیروزی) برابر است با احتمال آنکه هر لامپ دارای طول عمر حداکثر ۱۵۰ ساعت باشد.

در اینجا علاوه بر متغیر تصادفی Y، متغیر تصادفی X را نیز داریم که طبق فرض مسئله نشان‌دهنده طول عمر هر لامپ برحسب ساعت با چگالی احتمال $f(x)$ است. لذا مقدار p یعنی احتمال آنکه طول عمر هر لامپ حداکثر ۱۵۰ ساعت باشد، برابر $P(X\le ۱۵۰)$ است که برای محاسبه‌ی آن با توجه به اینکه X پیوسته و با چگالی احتمال $f(x)=\frac{۱۰۰}{x^۲}$, $x>۱۰۰$ است، داریم:

$$p=P(X\le ۱۵۰)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{۱۰۰}^{۱۵۰}\frac{۱۰۰}{x^۲}dx=-\frac{۱۰۰}{x}\bigg|_{۱۰۰}^{۱۵۰}=-(\frac{۱۰۰}{۱۵۰}-\frac{۱۰۰}{۱۰۰})=\frac{۱}{۳}$$

همچنین با محاسبه $p=\frac{۱}{۳}$ حاصل q (احتمال شکست) برابر $q=۱-p=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$ می‌شود. اکنون احتمال آنکه از بین $n=۵$ لامپ انتخابی، ۲ لامپ طول عمر کمتر و یا مساوی ۱۵۰ ساعت داشته باشد، با استفاده از توزیع دوجمله‌ای با پارامتر $n=۵$ و $p=\frac{۱}{۳}$ برابر است با:

$$P(Y=۲)=\binom{n}{y}p^y q^{n-y}=\binom{۵}{۲}(\frac{۱}{۳})^۲(\frac{۲}{۳})^{۵-۲}=\frac{۸۰}{۲۴۳}$$

مدرسان شریف

فصل چهارم

«نظریه برآورد»

مقدمه

کلیه مسائل مربوط به آمار استنباطی عموماً به مسئله برآورد و یا آزمون فرض برای پارامترهای جامعه منتهی می‌گردد. مسأله برآورد در این فصل ارائه می‌شود و آزمون فرض در فصل بعد ارائه می‌گردد. در بسیاری از حالات پارامترهای جامعه از قبیل میانگین، واریانس و نسبت جامعه مجهول است و محاسبه آن‌ها به طور مستقیم به دلایل مختلف از قبیل زمان‌بر بودن، هزینه، غیرقابل تکرار بودن و ... دشوار و یا غیرممکن می‌باشد. لذا به منظور تقریب انها با استفاده از یک آماره مناسب به‌دست آمده براساس یک نمونه انتخابی از جامعه مورد نظر، برآورد یا تخمینی از پارامتر یا پارامترهای جامعه ارائه می‌گردد. به عنوان مثال تخمین متوسط عمر یک نوع لاستیک خودرو تولیدی، براساس یک نمونه انتخابی به اندازه n انجام می‌شود و امکان آزمایش بر روی تمام محصولات تولیدی وجود ندارد. در این فصل به‌منظور برآورد یا تخمین پارامترهای جامعه دو نوع برآوردکننده ارائه شده است.

۱) **برآوردکننده نقطه‌ای:** برآوردگری است که تنها یک عدد را به‌عنوان تقریبی از پارامتر جامعه ارائه می‌کند.

۲) **برآوردکننده فاصله‌ای:** برآوردکننده فاصله‌ای، تخمین می‌زند که پارامتر جامعه در چه فاصله عددی قرار دارد.

درسنامه (۱): برآورد نقطه‌ای

متناظر با هر پارامتر جامعه، برآوردکننده‌های متعددی وجود دارد. همچنین متناظر با هر نمونه یک مقدار برای برآوردگر مشخص می‌شود و چون نمونه به‌صورت تصادفی انتخاب می‌شود، پس برآوردگرها متغیرهای تصادفی‌اند و دارای توزیع احتمال می‌باشند. به عنوان مثال وقتی واریانس یک جامعه براساس واریانس یک نمونه تصادفی یعنی S^2 برآورد می‌شود، چون متناظر با نمونه‌های مختلف مقادیر متفاوتی برای واریانس نمونه به‌دست می‌آید، پس S^2 متغیر تصادفی است و دارای میانگین و واریانس می‌باشد. در این میان نکته اساسی و مهم که باید به آن توجه کرد این است که به‌ندرت مقدار S^2 (واریانس نمونه‌ای) برابر σ^2 (واریانس جامعه) می‌شود. اما انتظار اینکه مقدار متوسط S^2 یا $E(S^2)$ برابر σ^2 (واریانس جامعه) شود، راضی‌کننده است. همان طور که اشاره شد در برآورد پارامتر جامعه ممکن است بیش از یک برآوردگر داشته باشیم. به‌عنوان مثال $\overline{X}$ (میانگین نمونه‌ای) و $\tilde{X}$ (میانه نمونه‌ای) هر دو برآوردگر μ (میانگین جامعه) هستند. در این حالت انتخاب برآوردگر با کمترین واریانس ممکن، سبب کاهش خطای تقریب و افزایش دقت تخمین می‌گردد. اکنون با توجه به ویژگی‌های گوناگون برآوردکننده‌ها، برآوردگری را انتخاب می‌کنیم که قابل اعتمادتر بوده و نسبت به بقیه در شرایط بهتر باشد. لذا برای انتخاب یک برآوردکننده مناسب، مفاهیم نااریبی، کمترین واریانس، کارایی، سازگاری و بسندگی مطرح می‌گردد.

برآوردکننده نااریب

همان‌طور که اشاره شد، برای هر پارامتر جامعه، متناظر نمونه انتخابی مختلف، برآوردکننده‌های مختلف به دست می‌آید که لزوماً برابر پارامتر جامعه نمی‌شود اما انتظار داریم که مقدار متوسط برآوردکننده با پارامتر جامعه برابر گردد. از آنجا که برآوردکننده خود متغیر تصادفی است، بنابراین دارای میانگین یا مقدار متوسط است. تساوی میانگین برآوردکننده با پارامتر جامعه را نااریبی می‌گویند. معمولاً پارامتر جامعه را با θ و برآوردگر را با $\hat{\theta}$ نشان می‌دهند. به عنوان مثال $\overline{x}$ (میانگین نمونه) برآوردگر نااریب برای μ (میانگین جامعه) می‌باشد.

تعریف: برآوردکننده $\hat{\theta}$ به‌عنوان برآوردگر نااریب برای پارامتر θ جامعه است اگر و تنها اگر $E(\hat{\theta}) = \theta$ باشد و چنانچه $E(\hat{\theta}) \neq \theta$، $\hat{\theta}$ برآوردگر اریب برای θ است. در این حالت مقدار اریبی برابر است با: $E(\hat{\theta}) - \theta =$ مقدار اریبی

مثال ۱: برای متغیر تصادفی X با چگالی احتمال $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta} & ; \quad 0<x<\theta \\ 0 & ; \quad \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$**، به ازای کدام مقدار k، عبارت** $\hat{\theta}=kX$ **برآوردگر ناریب بـرای پارامتر θ است؟**

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» بر طبق تعریف، $\hat{\theta}$ وقتی برآوردگر ناریب برای پارامتر θ است که داشته باشیم $E(\hat{\theta})=\theta$. طبق فرض مسئله $\hat{\theta}=kX$ است، لذا مقدار k را از تساوی $E(kX)=\theta$ حساب می‌کنیم. برای این کار با توجه به ویژگی امید ریاضی داریم:

$$E(kX)=\theta \Rightarrow kE(X)=\theta$$

در اینجا X دارای چگالی احتمال $f(x)=\frac{1}{\theta}$, $0<x<\theta$ است. این نشان می‌دهد X دارای چگالی یکنواخت پیوسته با $\alpha=0$, $\beta=\theta$ است. در چگالی یکنواخت پیوسته حاصل E(X) برابر $E(X)=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{0+\theta}{2}=\frac{\theta}{2}$ می‌باشد. اکنون با توجه به تساوی $kE(X)=\theta$ نتیجه می‌شود:

$$k(\frac{\theta}{2})=\theta \Rightarrow k=2$$

مثال ۲: فرض کنید متغیر تصادفی $X_1,\cdots,X_n$ **یک نمونه تصادفی از توزیع** $f(x)=\frac{1}{\Gamma(3)\theta^3}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}$ **باشد. در آن صورت برآوردگر ناریب θ کـدام است؟** (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $3\bar{X}$ ۲) $\frac{1}{3\bar{X}}$ ۳) $\frac{\bar{X}}{3}$ ۴) $\frac{3}{\bar{X}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای به‌دست آوردن برآوردگر ناریب پارامتر θ، برآوردکننده $\hat{\theta}$ را طوری می‌یابیم که داشته باشیم $E(\hat{\theta})=\theta$. در اینجا با توجه به تـابع چگـالی احتمـال داده شـده نتیجـه مـی‌شـود X دارای توزیـع گامـا بـا پـارامتر $\alpha=3$ و $\beta=\theta$ اسـت. زیـرا تـابع چگـالی گامـا به‌شکل $f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$ می‌باشد. از طرفی می‌دانیم $\bar{X}$ برآوردگر ناریب برای μ (میانگین جامعه) می‌باشد. پس $E(\bar{X})=\mu$ کـه در آن μ میانگین توزیع گاما و برابر $\mu=\alpha\beta=3\theta$ است. اکنون از تساوی $\mu=3\theta$ و $E(\bar{X})=\mu$ داریم:

$$E(\bar{X})=3\theta \Rightarrow \frac{1}{3}E(\bar{X})=\theta \Rightarrow E(\frac{1}{3}\bar{X})=\theta$$

با انتخاب $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{3}$ نتیجه می‌شود، شرط $E(\hat{\theta})=\theta$ برقرار است. بنابراین $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{3}$ برآوردگر ناریب برای پارامتر θ می‌باشد.

مثال ۳: فرض کنید X دارای توزیع پواسون با پارامتر m باشد. یک برآوردگر ناریب برای m^2 **کدام است؟** (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{X}{2}$ ۲) X^2+X ۳) $\frac{X^2}{2}$ ۴) X^2-X

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برآوردگر $\hat{\theta}$ برای m^2 را طوری می‌یابیم تا $E(\hat{\theta})=m^2$ گردد. برای اینکار چـون X دارای توزیـع پواسـون بـا پـارامتر m اسـت، بنابراین $E(X)=m$ و $Var(X)=m$ می‌باشد. از طرفی $Var(x)$ با دستور $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ حساب می‌شود. از این دستور داریم:

$$m=E(X^2)-(m^2) \Rightarrow m^2=E(X^2)-m$$

چون $E(x)=m$ است، پس می‌توان نوشت $m^2=E(X^2)-E(X)$ و طبق ویژگی امیـد ریاضـی تسـاوی $E(X^2-X)=E(X^2)-E(X)$ برقـرار است لذا داریم:

$$E(X^2-X)=m^2$$

اکنون با انتخاب $\hat{\theta}=X^2-X$ تساوی $E(\hat{\theta})=m^2$ به‌دست می‌آید. بنابراین طبق تعریف ناریبی، $\hat{\theta}=x^2-x$ برآوردکننده ناریب برای m^2 است.

مثال ۴: اگر $X \sim U(-\sqrt{\theta}\ ,\ \sqrt{\theta})$ باشد، به‌ازای کدام مقدار **a** و **b** برآوردگر $\delta(X) = aX^۲ + b(X+۱)$ یک برآوردگر نااریب برای θ خواهد بود؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $b=۱$ و $a=\circ$ ۲) $b=\circ$ و $a=۳$ ۳) $b=۳$ و $a=\circ$ ۴) $b=۱$ و $a=۱$

پاسخ: گزینه «۲» طبق تعریف، $\hat{\theta}$ را برآوردگر نااریب برای پارامتر θ گویند، هرگاه $E(\hat{\theta})=\theta$. بنابراین برای آنکه $\delta(X)$ برآوردگر نااریب برای θ باشد، لازم است شرط $E(\delta(X))=\theta$ برقرار باشد. چون $\delta(X)=aX^۲+bX+b$ است، بنابراین داریم: $E(aX^۲+bX+b)=\theta$. اکنون مقدار a و b را از این تساوی حساب می‌کنیم. برای این کار بر طبق ویژگی امید ریاضی می‌توان نوشت:

$$E(aX^۲+bX+b)=\theta \Rightarrow aE(X^۲)+bE(X)+b=\theta$$

ابتدا $E(X)$ و $E(X^۲)$ را حساب می‌کنیم. برطبق فرض مسئله، X دارای توزیع یکنواخت با پارامتر $\alpha=-\sqrt{\theta}$ و $\beta=\sqrt{\theta}$ است. بنابراین مقدار $E(X)$ و $Var(X)$ در توزیع یکنواخت پیوسته برابر است با:

$$E(X)=\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{-\sqrt{\theta}+\sqrt{\theta}}{۲}=\circ$$

$$Var(X)=\frac{(\beta-\alpha)^۲}{۱۲}=\frac{(\sqrt{\theta}+\sqrt{\theta})^۲}{۱۲}=\frac{(۲\sqrt{\theta})^۲}{۱۲}=\frac{\theta}{۳}$$

مقدار $E(X^۲)$ را از تساوی $Var(X)=E(X^۲)-(E(X))^۲$ حساب می‌کنیم.

$$E(X^۲)=Var(X)+(E(X))^۲=\frac{\theta}{۳}+\circ=\frac{\theta}{۳}$$

با قرار دادن مقادیر به دست آمده $E(X)=\circ$ و $E(X^۲)=\frac{\theta}{۳}$ در تساوی $aE(X^۲)+bE(X)+b=\theta$ داریم:

$$a(\frac{\theta}{۳})+b(\circ)+b=\theta \Rightarrow \frac{a}{۳}\theta+b=\theta$$

در نتیجه تساوی $\frac{\theta}{۳}a+b=\theta$ با توجه به گزینه‌ها تنها به‌ازای $a=۳$ و $b=\circ$ برقرار است.

مثال ۵: اگر $X_۱, X_۲, X_۳$ و $X_۴$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم و هرکدام دارای تابع چگالی $f_X(x)=e^{-t}u(x)$ باشد، بهترین تخمین متغیر تصادفی $X_۱$ برحسب مقدار مشاهده شده $Z=X_۱+X_۲+X_۳+X_۴$، با معیار حداقل میانگین مربع خطا کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۸)

۱) $\frac{Z^۲}{۴}$ ۲) $\frac{e^{-Z}}{۴}$ ۳) $\frac{Z}{۲}$ ۴) $\frac{Z}{۴}$

پاسخ: گزینه «۴» چون $u(x)$ به شکل $u(x)=\begin{cases}۱ & ;\ x>\circ \\ \circ & ;\ x\leq\circ\end{cases}$ تعریف می‌شود، بنابراین تابع چگالی داده شده، نمایی با پارامتر $\lambda=۱$ می‌باشد. لذا $X_i \sim EXP(۱)$ هستند و داریم:

$$E(X_i)=\lambda=۱$$

اکنون بهترین برآوردگر $\hat{\theta}$ برای $X_۱$ را طوری می‌یابیم تا داشته باشیم:

$$E(\hat{\theta})=۱$$

$$Z=X_۱+X_۲+X_۳+X_۴ \Rightarrow E(Z)=E(X_۱+X_۲+X_۳+X_۴)=E(X_۱)+E(X_۲)+E(X_۳)+E(X_۴)$$

$$=۱+۱+۱+۱=۴ \Rightarrow \frac{۱}{۴}E(Z)=۱ \Rightarrow E(\frac{۱}{۴}Z)=۱ \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{۱}{۴}Z$$

مثال ۶: فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پیوسته یکنواخت روی بازه $(\circ,a)$ باشد. اگر $W=\frac{۱}{۴n}\sum_{i=۱}^{n}X_i^۲$، میانگین متغیر تصادفی W کدام است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{a}{۱۲}$ ۲) $\frac{a}{۴}$ ۳) $\frac{a^۲}{۱۲}$ ۴) $\frac{a^۲}{۳}$

پاسخ: گزینه «۳» تابع چگالی یکنواخت پیوسته با پارامتر $\alpha=\circ$ و $\beta=a$ برابر است با:

$$f(x)=\frac{۱}{\beta-\alpha}=\frac{۱}{a-\circ}=\frac{۱}{a}\ ;\ \circ<x<a$$

همچنین میانگین و واریانس X با دستورهای مقابل حساب می‌شود.

$$E(X)=\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{\circ+a}{۲}=\frac{a}{۲}\ ,\ Var(X)=\frac{(\beta-\alpha)^۲}{۱۲}=\frac{a^۲}{۱۲}$$

فصل پنجم

«آزمون فرض و استنباط آماری»

مقدمه

در آزمون فرض محقق به دنبال این است که براساس یافته‌ها حدس و یا ادعایی را بپذیرد یا رد کند. به عنوان مثال، یک کارشناس قصد دارد براساس یک نمونه انتخابی از بین محصولات یک شرکت تولیدی که یک نوع لاستیک خودرو تولید می‌کند، این موضوع را بررسی کند که آیا متوسط عمر هریک از محصولات این شرکت حداقل ۶۰۰۰۰ کیلومتر است یا خیر؟ یا یک تولیدکننده موادغذایی می‌خواهد بداند که آیا احتمال اینکه مصرف‌کننده‌ای نوع جدید از بسته‌بندی را بر بسته‌بندی قبلی ترجیح می‌دهد، واقعاً ۰/۷ است یا خیر؟ همه این مسائل را می‌توان به زبان آزمون فرض‌های آماری بیان کرد و در مورد ادعای مطرح شده توسط پژوهشگر نتیجه‌گیری کرد. از آنجا که پایه و اساس آمار استنباطی بر مبنای احتمال و شانس است، بنابراین نتایجی که از طریق آن حاصل می‌شود، با عدم قطعیت همراه است و نمی‌توان با قاطعیت فرضیه پژوهشی را قبول یا رد کرد. بنابراین آزمون فرض در یک سطح خطا (سطح معنادار) به اندازه α انجام می‌شود.

در آزمون فرض؛ همواره یک ادعا یا حدس به نام فرض H_0 در مقابل ادعای متقابل H_1 در سطح معنادار به اندازه α مورد آزمون قرار می‌گیرد. به‌عنوان مثال فرضیه‌ای به این شکل مطرح شده است «متوسط عمر یک نوع قطعه الکترونیکی ۸۰ ساعت است» به منظور پذیرش یا رد این ادعا در سطح خطای α، فرضیه پژوهشی شامل فرض H_0 به‌صورت $H_0: \mu = 80$ در مقابل فرض متقابل H_1 به‌صورت $H_1: \mu \neq 80$ مدل‌بندی می‌شود تا با اطمینان $100(1-\alpha)\%$ فرض H_0 را بپذیریم و H_1 را رد کنیم یا H_0 را رد و H_1 را بپذیریم.

درسنامه (۱): آزمون فرض آماری، خطای نوع اول و دوم، بهترین ناحیه بحرانی

ایده کلی آزمون فرض این است که پژوهشگر براساس یک نمونه تصادفی انتخابی به اندازه n از جامعه موردنظر، می‌خواهد فرض $H_0: \theta = \theta_0$ را در مقابل فرض $H_1: \theta \neq \theta_0$ در سطح معنادار α آزمون کند. θ، پارامتر نامعلوم جامعه موردنظر است. برای انجام این‌کار براساس نمونه انتخابی، آماره آزمون که با $\hat{\theta}$ نشان داده می‌شود، محاسبه می‌گردد. $\hat{\theta}$ به‌عنوان برآوردگر برای پارامتر نامعلوم θ است. اگر مقدار $\hat{\theta}$ تقریباً با θ_0 برابر باشد، در این صورت فرض H_0 را قبول و H_1 را رد می‌کنیم و در صورتی‌که اختلاف $\hat{\theta}$ با θ_0 خیلی زیاد باشد، فرض H_0 را رد و H_1 را می‌پذیریم. در این میان ممکن است دچار خطا شویم، لذا دو نوع خطا به نام خطای نوع اول و دوم به‌صورت زیر مطرح است.

خطای نوع اول و دوم:

در آزمون فرض آماری، تصمیم‌گیری برای رد یا پذیرش فرضیه متکی بر احتمالات است. این نشان می‌دهد نوعی عدم قطعیت در تصمیم‌گیری برای رد یا پذیرش یک فرضیه وجود دارد و ممکن است فرضیه‌ای را رد کنیم درحالی‌که به واقع درست باشد و یا فرضیه‌ای را قبول کنیم درحالی‌که در واقعیت جامعه نادرست باشد. بنابراین رد فرضیه درست و قبول فرضیه نادرست دو نوع خطایی است که در آزمون فرض با آن مواجه هستیم. به‌عنوان مثال، یک شرکت سازنده دارویی جدید، می‌خواهد این فرض را که حداقل ۹۰ درصد بیماران مصرف‌کننده این دارو بهبود یافته‌اند، مورد آزمون قرار دهد. آن‌ها درصورتی‌که به خطا این فرض صفر را رد کنند که حداقل ۹۰ درصد بیماران با استفاده از داروی جدید بهبود یافته‌اند، مرتکب خطای نوع اول می‌شوند. و اگر به خطا این فرض صفر را قبول کنند که حداقل ۹۰ درصد بیماران با استفاده از این دارو بهبود یافته‌اند، مرتکب خطای نوع دوم خواهند شد. اکنون برای آزمون فرض $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل فرض $H_1: \theta = \theta_1$ دو نوع خطا به نام خطای نوع اول و دوم به شکل زیر تعریف می‌شود.

خطای نوع اول: وقتی فرض صفر (H_0) در واقعیت درست باشد ولی آن را رد کنیم، خطای نوع اول رخ داده است. مقدار خطای نوع اول را با α نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$\alpha = P(\text{درست است } H_0 \mid \text{رد } H_0)$

بنابر تعریف α، خطای نوع اول برابر احتمال رد فرضیه درست H_0 می‌باشد. یعنی: $\alpha = P(\text{رد فرضیه درست } H_0)$

همچنین از تعریف α، نتیجه می‌شود: $1-\alpha = 1 - P(\text{رد فرضیه درست } H_0) = P(\text{قبول فرضیه درست } H_0)$

خطای نوع دوم: وقتی فرض صفر (H_0) در واقعیت نادرست باشد ولی آن را قبول کنیم، خطای نوع دوم رخ می‌دهد. مقدار خطای نوع دوم را با β نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\beta = P(\text{نادرست است } H_0 \mid \text{قبول } H_0)$

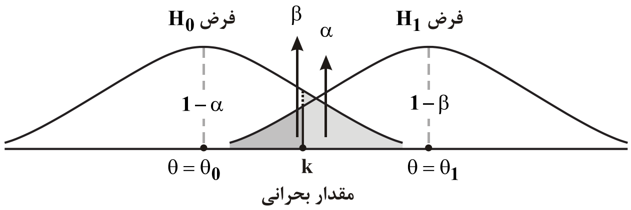
بنابر تعریف β، خطای نوع دوم برابر احتمال قبول فرضیه نادرست H_0 است. یعنی:

$\beta = P(\text{قبول فرضیه نادرست } H_0)$

همچنین بنابر تعریف نتیجه می‌شود: $1-\beta = 1 - P(\text{قبول فرضیه نادرست } H_0) = P(\text{رد فرضیه نادرست } H_0)$

ناحیه بحرانی آزمون: به ناحیه‌ای که در آن فرض H_0 در سطح معنادار α رد می‌شود، ناحیه بحرانی (ناحیه رد) به اندازه α گفته می‌شود.

برای آزمون فرض $H_0 : \theta = \theta_0$ در مقابل فرض $H_1 : \theta = \theta_1$ ناحیه بحرانی و همچنین ارتباط بین α و β در شکل زیر نشان داده شده است.



و داریم: $\alpha + \beta \le 1$

همان‌طورکه در شکل ملاحظه می‌شود، α و β با یکدیگر رابطه معکوس دارند؛ یعنی افزایش یکی باعث کاهش دیگری و کاهش یکی سبب افزایش دیگری می‌شود. به عبارت دیگر، با توجه به شکل با در نظر گرفتن مقدار بحرانی k، در نقاط مختلف محور افقی دیده می‌شود که افزایش k باعث کاهش α و افزایش β می‌شود و کاهش k، باعث افزایش α و کاهش β می‌شود. همچنین با توجه به تعریف ناحیه بحرانی، اگر برای نقاط نمونه‌ای واقع در ناحیه بحرانی نتیجه شود، $\theta = \theta_0$ است، در این صورت خطای نوع اول رخ می‌دهد و اگر $\theta = \theta_1$ باشد منجر به تصمیم‌گیری درست می‌شود. همچنین برای نقاط نمونه‌ای واقع در خارج ناحیه بحرانی می‌توان استدلال کرد اگر $\theta = \theta_0$ باشد منجر به تصمیم‌گیری درست می‌شود و چنانکه $\theta = \theta_1$ باشد، خطای نوع دوم رخ می‌دهد. مطالب بالا را می‌توان به طور خلاصه در جدول زیر ارائه داد.

تصمیم محقق / واقعیت جامعه	قبول H_0	رد H_0
H_0 درست است.	تصمیم‌گیری درست $1-\alpha$	خطای نوع اول α
H_0 نادرست است.	خطای نوع دوم β	تصمیم‌گیری درست $1-\beta$

مثال۱: فرض کنید $X \sim B(4,p)$ باشد. برای آزمون $H_0 : p = 0/2$ در مقابل $H_1 : p \ge 0/2$ اگر $x = 4$ باشد، فرض H_0 رد است. احتمـال خطـای نوع اول کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۴)

۱) $0/0032$ ۲) $0/0016$ ۳) $0/05$ ۴) $0/016$

پاسخ: گزینه «۲» احتمال خطای نوع اول با فرمول $\alpha = P(\text{درست است } H_0 \mid \text{رد } H_0)$ حساب می‌شود. در اینجا طبق فرض مسئله H_0 وقتی رد است که $X = 4$ باشد و H_0 وقتی قبول است که $p = 0/2$ باشد. از آنجا که X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامتر p و $n = 4$ است، بنابراین مقدار α برابر است با:

$$\alpha = P(X = 4 \mid p = 0/2) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{4}{4}(0/2)^4(0/8)^0 = 0/0016$$

مثال ۲: فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ مشاهده‌های یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای نرمال با $\sigma^۲ = ۱$ باشد. اگر بخواهیم فرض $H_۰ : \mu = \mu_۰$ را در برابر فرض مقابل $H_۱ : \mu = \mu_۱$ $(\mu_۱ > \mu_۰)$ وقتی‌که $\bar{X} > \mu_۰ + ۱$ رد کنیم، اندازه ناحیه بحرانی کدام است؟

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۴

پاسخ: گزینه «۱» در آزمون فرض اندازه ناحیه بحرانی برابر α (احتمال خطای نوع اول) می‌باشد کـه بـا فرمـول $\alpha = P($رد $H_۰$ | درست است $H_۰)$ حساب می‌شود. طبق فرض مسئله، $H_۰$ وقتی رد می‌شود که $\bar{X} > \mu_۰ + ۱$ باشد.
و وقتی پذیرفته است که $\mu = \mu_۰$ باشد. بنابراین مقدار α برابر می‌شود با:

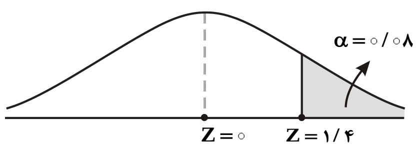
$$\alpha = P(\bar{X} > \mu_۰ + ۱ \mid \mu = \mu_۰)$$

در اینجـا نمونـه‌گیـری از جامعـه نرمـال اسـت. بنـابراین بـرای محاسـبه α از توزیـع نرمـال اسـتاندارد بـا متغیـر $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_۰}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ اسـتفاده مـی‌کنـیم.

چون $\sigma^۲ = ۱$ و $n = ۲$ و $\mu = \mu_۰$ است، داریم:

$$\alpha = P\left(Z > \frac{\mu_۰ + ۱ - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \mid \mu = \mu_۰\right) = P\left(Z > \frac{\mu_۰ + ۱ - \mu_۰}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}\right) = P(Z > \sqrt{۲}) = ۱ - P(Z \le \sqrt{۲}) \simeq ۱ - P(Z \le ۱/۴) = ۱ - ۰/۹۲ = ۰/۰۸$$

توجه کنید که با استفاده از جدول توزیع نرمال استاندارد، $P(Z < ۱/۴) = ۰/۹۲$ می‌باشد.



مثال ۳: یک مشاهده واحد از یک متغیر تصادفی که دارای توزیع نمایی است برای آزمون این فرض به‌کار می‌رود کـه میـانگین توزیـع $\theta = ۲$ در مقابـل فرض $\theta = ۳$ می‌باشد. اگر فرض صفر را وقتی بپذیریم که مقدار مشاهده شده متغیر تصادفی کمتر از ۳ است، احتمال خطای نوع اول و دوم کدام است؟

۱) $\alpha = ۱ - e^{-\frac{۳}{۲}}$ و $\beta = e^{-۱}$ ۲) $\alpha = e^{-\frac{۳}{۲}}$ و $\beta = e^{-۱}$

۳) $\alpha = e^{-۱}$ و $\beta = e^{-\frac{۳}{۲}}$ ۴) $\alpha = e^{-\frac{۳}{۲}}$ و $\beta = ۱ - e^{-۱}$

پاسخ: گزینه «۴» α و β با دستور $\alpha = P($رد $H_۰$ | درست است $H_۰)$ و $\beta = P($قبول $H_۰$ | نادرست است $H_۰)$ محاسبه می‌شود. در اینجا آزمـون فرض به‌صورت $\begin{cases} H_۰ : \theta = ۲ \\ H_۱ : \theta = ۳ \end{cases}$ است. طبق فرض مسئله، $H_۰$ وقتی قبول می‌شود که $X < ۳$ باشد. پس $H_۰$ وقتی رد می‌شود که $X \ge ۳$ باشد.

از طرفی چون X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است، بنابراین تابع چگالی X به‌صورت $f(x) = \frac{۱}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x > ۰$ مـی‌باشـد. در نتیجـه مقـدار α و β برابر است با:

$$\alpha = P(X \ge ۳ \mid \theta = ۲) = \int_{۳}^{+\infty} \frac{۱}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \int_{۳}^{+\infty} \frac{۱}{۲} e^{-\frac{x}{۲}} dx = e^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$\beta = P(X < ۳ \mid \theta = ۳) = \int_{۰}^{۳} \frac{۱}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \int_{۰}^{۳} \frac{۱}{۳} e^{-\frac{x}{۳}} dx = ۱ - e^{-\frac{x}{۳}} = ۱ - e^{-۱}$$

در توزیع نمایی با چگالی احتمال $f(x) = \frac{۱}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ ویژگی‌های مقابل برقرار است.

$$P(X > a) = e^{-\frac{a}{\theta}} \quad , \quad P(X < b) = ۱ - e^{-\frac{b}{\theta}}$$